

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

WAGNER BARBOSA DE MEDEIROS JÚNIOR

**CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA INTEGRADA DE ELASTÔMEROS
VIA DERIVADAS FRACIONÁRIAS E MÉTODO GHM**

CURITIBA

2010

WAGNER BARBOSA DE MEDEIROS JÚNIOR

**CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA INTEGRADA DE ELASTÔMEROS
VIA DERIVADAS FRACIONÁRIAS E MÉTODO GHM**

Dissertação apresentada como requisito para obter o título de mestre em engenharia mecânica do curso de mestrado em engenharia mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes,
PhD

CURITIBA

2010

TERMO DE APROVAÇÃO

WAGNER BARBOSA DE MEDEIROS JUNIOR

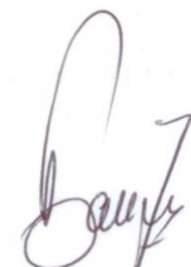
CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA INTEGRADA DE ELASTÔMEROS VIA DERIVADAS FRACIONÁRIAS E MÉTODO GHM

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção de grau de Mestre em Engenharia Mecânica, área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Marco Antônio Luersen
UTFPR



Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri
UFPR



Prof. Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes
UFPR/PG-Mec
Presidente

Curitiba, 29 de novembro de 2010.

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Wagner e Mágda,
e meus irmãos, André Luiz, Francini e João Pedro.

Aos familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conceder a oportunidade de subir mais um degrau de minha escala evolutiva.

Ao prezado Professor Eduardo, pela constante orientação, paciência, conhecimentos transmitidos e amizade, além da crença em minhas habilidades para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, Wagner e Mágda, e meus irmãos, André, Francini e João, pelo amor, apoio e carinho.

Aos meus amigos, que foram de fundamental importância, pois sem os momentos de descontração a realização de um trabalho se torna impraticável.

Ao Professor Bavastri, pelas dicas e conselhos relativos à parte computacional. Ao Professor Jucélio, pelo interesse no andamento do trabalho. Ao secretário Marcio, pelo desvelo e paciência ao sanar minhas dúvidas burocráticas.

Às colegas Patricia e Fernanda, que tornaram os momentos finais dessa dissertação menos solitários.

À CAPES/REUNI, que me forneceu apoio financeiro ao iniciar este projeto.

À Universidade Federal do Paraná, que forneceu a estrutura e permitiu a realização desta dissertação de mestrado.

*“O sucesso é ir
de fracasso em fracasso
sem perder o entusiasmo”*

Winston Churchill

RESUMO

Vibrações mecânicas indesejadas de sistemas mecânicos devem ser controladas, seja por desconforto ou por possíveis falhas estruturais futuras. As formas de controle variam, podendo ser: passivas, em que não há demanda de potência externa, ativas, em que há demanda de potência externa, e mistas, em que elementos passivos e ativos são simultaneamente utilizados.

O controle passivo pode ser feito de maneira muito eficiente utilizando materiais viscoelásticos. Via de regra, o desenvolvimento da estratégia de controle empregando tais materiais requer o conhecimento prévio de duas propriedades dinâmicas básicas: o módulo dinâmico de elasticidade do material e o fator de perda. Em condições usuais de engenharia essas propriedades apresentam dependência significativa quanto à temperatura e à frequência.

Para o conhecimento das propriedades dinâmicas é necessário que se tenha em mãos dados experimentais que possam ser utilizados em uma modelagem matemática que, por sua vez, fornecerá os parâmetros de projeto necessários. Dentre os diversos tipos de modelagem, pode-se destacar o modelo de derivadas fracionárias e o modelo Golla-Hughes-McTavish (GHM).

Este trabalho investiga os dois modelos citados, procurando o melhor resultado possível no âmbito da caracterização dinâmica dos materiais em uma faixa de frequências e temperaturas de interesse, através da chamada caracterização dinâmica integrada. Nessa investigação, são empregadas técnicas de otimização não linear e algoritmos genéticos.

Mostra-se que os ajustes feitos via cálculo fracionário apresentam melhores resultados e que o modelo GHM quando munido de diversos termos pode apresentar resultados igualmente satisfatórios, embora haja, para este caso, perda de informações quanto às estimativas iniciais e região de busca de alguns parâmetros, além de poder apresentar discrepâncias nas curvas de propriedades dinâmicas.

Palavras-chave: Controle Passivo de Vibrações. Materiais Viscoelásticos. Derivadas Fracionárias. Método GHM. Caracterização Dinâmica.

ABSTRACT

Unwanted vibrations of mechanical systems must be controlled due to either discomfort or possible future structural failure. The types of control vary, and they can be: passive, where there is not demand for outside power, active, in which there is demand for outside power, and mixed, or hybrid, in which passive and active elements are simultaneously used.

The passive control can be done very efficiently by using viscoelastic materials. As a rule, the development of a control strategy employing such materials requires prior knowledge of two basic dynamic properties: the dynamic modulus of elasticity and the corresponding loss factor. Under the usual range of engineering design these properties have significant dependence on the temperature and frequency.

To the knowledge of the dynamical properties, it is necessary to have available experimental data that can be used in a mathematical model which, in turn, will provide the required design parameters. Among the various types of modeling, the model of fractional derivatives and the GHM model can be highlighted.

This work investigates the two models mentioned above, looking for the best possible outcome to the dynamic characterization of a known viscoelastic material, in a range of frequencies and temperatures of interest. In a process called integrated dynamic characterization, nonlinear optimization techniques and genetic algorithms are employed.

It is shown that the curve fittings made with the fractional calculus model have better results and that the GHM model, when used with various terms, can produce satisfactory results. However, in this case, lack of information about the initial estimates and the searching region of some parameters can lead to discrepancies in the curves of dynamic properties.

Keywords: Passive Vibration Control. Viscoelastic Materials. Fractional Calculus. GHM Method. Dynamic Characterization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 - Variação do módulo dinâmico e do fator de perda com a temperatura	30
Figura 2.2 - Variação do módulo dinâmico e do fator de perda com a frequência	30
Figura 2.3 - Gráficos de propriedades dinâmicas medidas.....	33
Figura 2.4 - Wicket plot.....	33
Figura 2.5 - Fator de deslocamento x temperatura	35
Figura 2.6 - Nomograma de frequência reduzida	36
Figura 3.1- Módulo real de cisalhamento via DF	40
Figura 3.2- Fator de perda via DF	40
Figura 3.3 - Variação do módulo real de cisalhamento com G_0	41
Figura 3.4 - Variação do fator de perda com G_0	41
Figura 3.5 - Variação do módulo real de cisalhamento com G_1	42
Figura 3.6 - Variação do fator de perda com G_1	42
Figura 3.7 - Variação do módulo real de cisalhamento com b	43
Figura 3.8 - Variação do fator de perda com b	43
Figura 3.9 - Variação do módulo real de cisalhamento com β	44
Figura 3.10 - Variação do fator de perda β	44
Figura 4.1 - (a) Estrutura unidimensional sob deformação (b) Função relaxação $G(t)$ (tensão para uma deformação tipo degrau unitário)	48
Figura 4.2 - Módulo real de cisalhamento via GHM padrão	55
Figura 4.3 - Fator de perda via GHM padrão	56
Figura 4.4 - Variação do módulo real de cisalhamento com G_0	57
Figura 4.5 - Variação do fator de perda com G_0	57
Figura 4.6 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\alpha}$	58
Figura 4.7 - Variação do fator de perda com $\hat{\alpha}$	58
Figura 4.8 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\beta}$	59
Figura 4.9 - Variação do fator de perda com $\hat{\beta}$	59
Figura 4.10 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\delta}$	60
Figura 4.11 - Variação do fator de perda com $\hat{\delta}$	60
Figura 4.12 - Módulo real de cisalhamento via GHM alternativo.....	62

Figura 4.13 - Fator de perda via GHM alternativo	62
Figura 4.14 - Variação do módulo de cisalhamento com G_{∞}	63
Figura 4.15 - Variação do fator de perda com G_{∞}	63
Figura 4.16 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\theta}$	64
Figura 4.17 - Variação do fator de perda com $\hat{\theta}$	64
Figura 4.18 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\mu}$	65
Figura 4.19 - Variação do fator de perda com $\hat{\mu}$	66
Figura 4.20 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\beta}$	66
Figura 4.21 - Variação do fator de perda com $\hat{\beta}$	67
Figura 4.22 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\delta}$	67
Figura 4.23 - Variação do fator de perda com $\hat{\delta}$	68
Figura 4.24 - Influência do número de termos adicionais no módulo real de cisalhamento	74
Figura 4.25 - Influência do número de termos adicionais no fator de perda.....	74
Figura 5.1 - Modelo de um grau de liberdade com elemento viscoelástico	77
Figura 5.2 - Detalhe do corpo de prova	80
Figura 5.3 - Esquema da montagem do experimento dos elastômeros.	82
Figura 5.4 - Função com múltiplos mínimos locais	86
Figura 5.5 - Valores experimentais e ajustados com respectivos resíduos.....	88
Figura 5.6 - Resíduos da figura 5.5	88
Figura 6.1- (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); -18,3°C - DF	94
Figura 6.2 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); -10°C - DF	95
Figura 6.3 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 0,3°C - DF.....	96
Figura 6.4 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 9,8°C - DF.....	97

Figura 6.5 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 20°C - DF.....	98
Figura 6.6 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 30°C - DF.....	99
Figura 6.7 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 39,9°C - DF.....	100
Figura 6.8 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 50°C - DF.....	101
Figura 6.9 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 60,2°C - DF.....	102
Figura 6.10 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); -18,3°C – GHM 1 termo	105
Figura 6.11 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); -10°C – GHM 1 termo	106
Figura 6.12 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 0,3°C – GHM 1 termo.....	107
Figura 6.13 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 9,8°C – GHM 1 termo.....	108
Figura 6.14 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 20°C – GHM 1 termo.....	109
Figura 6.15 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 30°C – GHM 1 termo.....	110

Figura 6.16 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); 39,9°C –GHM 1 termo.....	111
Figura 6.17 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); 50°C – GHM 1 termo.....	112
Figura 6.18 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); 60,2°C – GHM 1 termo.....	113
Figura 6.19 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); -18,3°C – GHM 3 termos.....	114
Figura 6.20 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); -10°C – GHM 3 termos.....	115
Figura 6.21 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); 0,3°C – GHM 3 termos	116
Figura 6.22 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); 9,8°C - GHM 3 termos.....	117
Figura 6.23 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); 20°C – GHM 3 termos	118
Figura 6.24 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); 30°C – GHM 3 termos	119
Figura 6.25 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); 39,9°C – GHM 3 termos	120
Figura 6.26 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTTransmissibilidade ajustada (módulo); 50°C – GHM 3 termos	122

Figura 6.27 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 60,2°C – GHM 3 termos	123
Figura 6.28 – <i>Wicket plot</i> - borracha butílica	124
Figura 6.29 – Gráficos das transmissibilidades (módulos), Transmissibilidades (fases), Resíduos quadráticos, ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); DF 3 temperaturas	126
Figura 6.30 – Fator de deslocamento – DF 3 temperaturas.....	126
Figura 6.31 – Nomograma de frequências reduzidas – DF 3 temperaturas	126
Figura 6.32 - <i>Wicket plot</i> experimental e ajustado – DF 3 temperaturas.....	127
Figura 6.33 – Gráficos das transmissibilidades (módulos), Transmissibilidades (fases), Resíduos quadráticos, ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); GHM 1 termo 3 temperaturas	129
Figura 6.34 – Fator de deslocamento – GHM 1 termo 3 temperaturas	130
Figura 6.35 – Nomograma de frequência reduzida – GHM 1 termo 3 temperaturas	130
Figura 6.36 - <i>Wicket plot</i> experimental e ajustado – GHM 1 termo 3 temperaturas	131
Figura 6.37 – Gráficos das transmissibilidades (módulos), Transmissibilidades (fases), Resíduos quadráticos, ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); GHM 3 termos 3 temperaturas	132
Figura 6.38 – Fator de deslocamento – GHM 3 termos 3 temperaturas.....	133
Figura 6.39 – Nomograma de Frequência Reduzida – GHM 3 termos 3 temperaturas	133
Figura 6.40 - <i>Wicket plot</i> experimental e ajustado – GHM 3 termos 3 temperaturas	134
Figura 6.41 – Gráficos das transmissibilidades (módulos), Transmissibilidades (fases), Resíduos quadráticos, ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); GHM 7 termos 3 temperaturas	136
Figura 6.42 – Fator de deslocamento – GHM 7 termos 3 temperaturas.....	136
Figura 6.43 – Nomograma de frequência reduzida – GHM 7 termos 3 temperaturas	137
Figura 6.44 - <i>Wicket plot</i> experimental e ajustado – GHM 7 termos 3 temperaturas	137
Figura 6.45 – Gráficos das transmissibilidades (módulos), Transmissibilidades (fases), Resíduos quadráticos, ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); GHM 7 termos 3 temperaturas (2).....	139
Figura 6.46 – Fator de deslocamento – GHM 7 termos 3 temperaturas (2)	139
Figura 6.47 – Nomograma de frequência reduzida – GHM 7 termos 3 temperaturas (2).....	140

Figura 6.48 - <i>Wicket plot</i> experimental e ajustado – GHM 7 termos 3 temperaturas (2).....	140
Figura 6.49 – Transmissibilidades (módulos) – DF 9 temperaturas.....	143
Figura 6.50 – Transmissibilidades (fases) – DF 9 temperaturas	143
Figura 6.51 – Resíduos quadráticos – DF 9 temperaturas	144
Figura 6.52 – ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo) – DF 9 temperaturas	144
Figura 6.53 – Fator de deslocamento – DF 9 temperaturas.....	145
Figura 6.54 – Nomograma de frequência reduzida – DF 9 temperaturas.....	145
Figura 6.55 - <i>Wicket plot</i> experimental e ajustado – DF 9 temperaturas.....	146
Figura 6.56 – Transmissibilidades (módulo) – GHM 1 termo 9 temperaturas	147
Figura 6.57 – Transmissibilidades (fases) – GHM 1 termo 9 temperaturas.....	148
Figura 6.58 – Resíduos quadráticos – GHM 1 termo 9 temperaturas	148
Figura 6.59 – ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo).....	149
Figura 6.60 – Fator de deslocamento – GHM 1 termo 9 temperaturas	149
Figura 6.61 – Nomograma de Frequência Reduzida – GHM 1 termo 9 temperaturas.....	150
Figura 6.62 - <i>Wicket plot</i> experimental e ajustado – GHM 1 termo 9 temperaturas	150
Figura 6.63 – Transmissibilidades (módulo) – GHM 3 termos 9 temperaturas	152
Figura 6.64 – Transmissibilidades (fases) – GHM 3 termos 9 temperaturas	152
Figura 6.65 – Resíduos quadráticos – GHM 3 termos 9 temperaturas.....	153
Figura 6.66 – ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo) – GHM 3 termos 9 temperaturas.....	153
Figura 6.67 – Fator de deslocamento – GHM 3 termos 9 temperaturas.....	154
Figura 6.68 – Nomograma de Frequência Reduzida – GHM 3 termos 9 temperaturas	154
Figura 6.69 - <i>Wicket plot</i> experimental e ajustado – GHM 3 termos 9 temperaturas	155
Figura 6.70 – Transmissibilidades (módulo) – GHM 7 termos 9 temperaturas	157
Figura 6.71 – Transmissibilidades (fases) – GHM 7 termos 9 temperaturas	157
Figura 6.72 – Resíduos quadráticos – GHM 7 termos 9 temperaturas.....	158
Figura 6.73 – ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo) – GHM 7 termos 9 temperaturas.....	158
Figura 6.74 – Fator de deslocamento – GHM 7 termos 9 temperaturas.....	159
Figura 6.75 – Nomograma de Frequência Reduzida – GHM 7 termos 9 temperaturas	159
Figura 6.76 - <i>Wicket plot</i> experimental e ajustado – GHM 7 termos 9 temperaturas	160
Figura II.1 – Gráfico de módulo e fator de perda versus frequência reduzida para uma borracha butílica de composição típica..	173

Figura II.2 – <i>Wicket plot</i> de uma borracha butílica de composição típica.....	173
---	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Valores base do modelo de DF.....	40
Tabela 4.1 - Funções dissipação	52
Tabela 4.2 - Valores base do modelo GHM padrão	55
Tabela 4.3 - Valores base do modelo GHM alternativo	61
Tabela 4.4 - Características relevantes e parâmetros de modelos viscoelásticos	73
Tabela 6.1 - Parâmetros DF -18,3°C.....	93
Tabela 6.2 - Índices DF -18,3°C	93
Tabela 6.3 - Parâmetros DF -10°C.....	94
Tabela 6.4 - Índices DF -10°C	94
Tabela 6.5 - Parâmetros DF 0,3 °C	95
Tabela 6.6 - Índices DF 0,3°C	95
Tabela 6.7 - Parâmetros DF 9,8°C	96
Tabela 6.8 - Índices DF 9,8°C	96
Tabela 6.9 - Parâmetros DF 20°C	97
Tabela 6.10 - Índices DF 20°C	97
Tabela 6.11 - Parâmetros DF 30°C	98
Tabela 6.12 - Índices DF 30°C	98
Tabela 6.13 - Parâmetros DF 39,9 °C	99
Tabela 6.14 - Índices DF 39,9°C	99
Tabela 6.15 - Parâmetros DF 50°C	100
Tabela 6.16 - Índices DF 50°C	100
Tabela 6.17 - Parâmetros DF 60,2°C	101
Tabela 6.18 - Índices DF 60,2°C	101
Tabela 6.19 – Parâmetros GHM 1 termo -18,3°C	104
Tabela 6.20 – Índices GHM 1 termo -18,3°C.....	104
Tabela 6.21 – Parâmetros GHM 1 termo -10°C	105
Tabela 6.22 – Índices GHM 1 termo -10°C.....	105
Tabela 6.23 – Parâmetros GHM 1 termo 0,3°C.....	106
Tabela 6.24 – Índices GHM 1 termo 0,3°C	106
Tabela 6.25 – Parâmetros GHM 1 termo 9,8°C.....	107
Tabela 6.26 – Índices GHM 1 termo 9,8°C	107

Tabela 6.27 – Parâmetros GHM 1 termo 20°C.....	108
Tabela 6.28 – Índices GHM 1 termo 20°C.....	108
Tabela 6.29 – Parâmetros GHM 1 termo 30°C.....	109
Tabela 6.30 – Índices GHM 1 termo 30°C	109
Tabela 6.31 – Parâmetros GHM 1 termo 39,9°C.....	110
Tabela 6.32 – Índices GHM 1 termo 39,9°C	110
Tabela 6.33 – Parâmetros GHM 1 termo 50°C.....	111
Tabela 6.34 – Índices GHM 1 termo 50°C	111
Tabela 6.35 – Parâmetros GHM 1 termo 60,2°C.....	112
Tabela 6.36 – Índices GHM 1 termo 60,2°C	112
Tabela 6.37 – Parâmetros GHM 3 termos -18,3°C.....	114
Tabela 6.38 – Índices GHM 3 termos -18,3°C	114
Tabela 6.39 – Parâmetros GHM 3 termos -10°C.....	115
Tabela 6.40 – Índices GHM 3 termos -10°C	115
Tabela 6.41 – Parâmetros GHM 3 termos 0,3°C	116
Tabela 6.42 – Índices GHM 3 termos 0,3°C.....	116
Tabela 6.43 – Parâmetros GHM 3 termos 9,8°C	117
Tabela 6.44 – Índices GHM 3 termos 9,8°C.....	117
Tabela 6.45 – Parâmetros GHM 3 termos 20°C	118
Tabela 6.46 – Índices GHM 3 termos 20°C.....	118
Tabela 6.47 – Parâmetros GHM 3 termos 30°C	119
Tabela 6.48 – Índices GHM 3 termos 30°C.....	119
Tabela 6.49 – Parâmetros GHM 3 termos 39,9 °C	120
Tabela 6.50 – Índices GHM 3 termos 39,9°C.....	120
Tabela 6.51 – Parâmetros GHM 3 termos 50°C	121
Tabela 6.52 – Índices GHM 3 termos 50°C.....	121
Tabela 6.53 – Parâmetros GHM 3 termos 60,2°C	122
Tabela 6.54 – Índices GHM 3 termos 60,2°C.....	122
Tabela 6.55 – Parâmetros DF 3 temperaturas.....	125
Tabela 6.56 – Índices DF 3 temperaturas	125
Tabela 6.57 – Parâmetros GHM 1 termo 3 temperaturas	128
Tabela 6.58 – Índices GHM 1 termo 3 temperaturas	128
Tabela 6.59 – Parâmetros GHM 3 termos 3 temperaturas	131

Tabela 6.60 – Índices GHM 3 termos 3 temperaturas	132
Tabela 6.61 – Parâmetros GHM 7 termos 3 temperaturas	135
Tabela 6.62 – Índices GHM 7 termos 3 temperaturas	135
Tabela 6.63 – Parâmetros GHM 7 termos 3 temperaturas (2).....	138
Tabela 6.64 – Índices GHM 7 termos 3 temperaturas (2)	138
Tabela 6.65 – Parâmetros DF 9 temperaturas.....	142
Tabela 6.66 – Índices DF 9 temperaturas	142
Tabela 6.67 – Parâmetros GHM 1 termo 9 temperaturas	147
Tabela 6.68 – Índices GHM 1 termo 9 temperaturas	147
Tabela 6.69 – Parâmetros GHM 3 termos 9 temperaturas	151
Tabela 6.70 – Índices GHM 3 termos 9 temperaturas	151
Tabela 6.71 – Parâmetros GHM 7 termos 9 temperaturas	156
Tabela 6.72 – Índices GHM 7 termos 9 temperaturas	156

LISTA DE SIMBOLOS

Letras Romanas:

A	- Área de cisalhamento
B	- Módulo volumétrico
D	- Derivada
e	- Espessura do elastômero no corpo de prova
\bar{e}	- Vetor complexo de erro
E	- Módulo de elasticidade (ou de Young)
E_0	- Módulo de elasticidade (ou de Young) inferior
E_1	- Módulo de elasticidade (ou de Young) superior
\bar{E}	- Módulo complexo de elasticidade (ou de Young)
E_I	- Módulo imaginário de elasticidade (ou de Young)
E_R	- Módulo real de elasticidade (ou de Young)
f	- Função matemática
F	- Força
G	- Módulo de cisalhamento
\bar{G}	- Módulo complexo de cisalhamento
G_0	- Módulo de cisalhamento inferior
G_1	- Módulo de cisalhamento superior
G_F	- Módulo de cisalhamento na temperatura de referência
G_I	- Módulo imaginário de cisalhamento
G_R	- Módulo real de cisalhamento
h	- Largura do elastômero no corpo de prova
$\bar{h}(s)$	- Função dissipação no domínio de Laplace
H(t)	- Parte dependente do tempo do módulo de relaxação
i	- $\sqrt{-1}$
K	- Constante de mola
\bar{k}	- Rigidez complexa de um material viscoelástico
l	- Comprimento do elastômero no corpo de prova

m_g	- Razão entre massa e o coeficiente η
N	- Torção
\dot{p}	- Taxa de trabalho mecânico interno
q	- Coordenada de deslocamento no modelo GHM
r	- Parâmetro GHM restringido
rd	- Resíduo
S_{xy}	- Espectro cruzado de potência de $x(t)$ e $y(t)$
S_{yy}	- Auto espectro de potência de $y(t)$
T	- Temperatura
$\bar{T}(\Omega)$	- Transmissibilidade calculada
$\bar{T}_E(\Omega)$	- Transmissibilidade experimental
T_F	- Temperatura de referência
t	- Tempo
$x(t)$	- Deslocamento no domínio do tempo
$\bar{X} \ \Omega$	- Deslocamento no domínio da frequência
y	- Valores experimentais
\hat{y}	- Valores preditos
\bar{y}	- Média dos valores experimentais
$y(t)$	- Deslocamento no domínio do tempo
$\bar{Y} \ \Omega$	- Deslocamento no domínio da frequência
z	- Coordenada auxiliar do método GHM
H	- Transposto conjugado (índice superior)
T	- Transposto (índice superior)

Letras Gregas:

α_T	- Fator de deslocamento
α	- Parâmetro fracionário do material
$\hat{\alpha}$	- Parâmetro GHM do material
β	- Parâmetro fracionário do material

$\hat{\beta}$	- Parâmetro GHM do material
γ	- Deformação ao cisalhamento
$\hat{\gamma}$	- Parâmetro GHM do material
Γ	- Função gama
$\hat{\delta}$	- Parâmetro GHM do material
ε	- Deformação longitudinal
η	- Fator de perda
η_E	- Fator de perda longitudinal
η_G	- Fator de perda ao cisalhamento
$(\eta_G)_F$	- Fator de perda ao cisalhamento na temperatura de referência
η_v	- Coeficiente de viscosidade
θ_1	- Parâmetro empírico do material na equação WLF
θ_2	- Parâmetro empírico do material na equação WLF
$\hat{\theta}$	- Parâmetro GHM do material
$\dot{\kappa}$	- Taxa de energia de dissipação
λ	- Ângulo de deformação
$\mu(t)$	- Função degrau unitário
ν	- Coeficiente de Poisson
ρ	- Densidade do material
ρ_F	- Densidade do material na temperatura de referência
σ	- Tensão longitudinal
τ	- Tensão de cisalhamento
φ	- Tempo variável
ϑ	- Fator geométrico do elemento viscoelástico e inserções metálicas
$\dot{\psi}$	- Taxa de variação de energia livre
Ω	- Frequência
Ω_r	- Frequência reduzida

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
2	CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA	27
2.1	MÓDULO DINÂMICO COMPLEXO DE ELASTICIDADE	28
2.2	EFEITOS DE FATORES AMBIENTAIS	29
2.2.1	Efeitos da Temperatura.....	29
2.2.2	Efeitos da Frequência	30
2.2.3	Notação Completa do Módulo Complexo	31
2.3	MÓDULO COMPLEXO DE CISALHAMENTO	31
2.4	PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO E NOMOGRAMA DE FREQUÊNCIA REDUZIDA.....	32
3	MODELO DE DERIVADAS FRACIONÁRIAS (DF)	37
3.1	A EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DO MODELO DE DF.....	37
3.2	ANÁLISE DOS PARÂMETROS DO MODELO DE DF	39
3.2.1	Influência do Parâmetro G_0	41
3.2.2	Influência do Parâmetro G_1	42
3.2.3	Influência do Parâmetro b	43
3.2.4	Influência do Parâmetro β	44
3.3	REGIÃO DE BUSCA NO MODELO DE DF	45
4	O MODELO GHM (GOLLA-HUGHES-MCTAVISH)	48
4.1	A EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DO MODELO GHM	48
4.2	CONVERSÃO DO DOMÍNIO DE LAPLACE PARA O DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	53
4.3	ANÁLISE DOS PARÂMETROS DO MODELO GHM PADRÃO.....	55
4.3.1	Influência do Parâmetro G_0	56
4.3.2	Influência do Parâmetro $\hat{\alpha}$	57
4.3.3	Influência do Parâmetro $\hat{\beta}$	59
4.3.4	Influência do Parâmetro $\hat{\delta}$	60
4.3.5	Sobre a semelhança da influência dos parâmetros $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$	61
4.4	ANÁLISE DOS PARÂMETROS DO MODELO GHM ALTERNATIVO	61
4.4.1	Influência do Parâmetro G_∞	62
4.4.2	Influência do Parâmetro $\hat{\theta}$	64
4.4.3	Influência do Parâmetro $\hat{\mu}$	65
4.4.4	Influência do Parâmetro $\hat{\beta}$	66

4.4.5	Influência do Parâmetro $\hat{\delta}$	67
4.5	REGIÃO DE BUSCA NO MODELO VIA GHM PADRÃO	68
4.6	REGIÃO DE BUSCA NO MODELO VIA GHM ALTERNATIVO	70
4.7	TERMOS ADICIONAIS EM MODELOS GHM	73
5	MÉTODOS EXPERIMENTAIS E DE MINIMIZAÇÃO	77
5.1	TRANSMISSIBILIDADES ANALÍTICA E EXPERIMENTAL	77
5.2	CÁLCULO DO FATOR m_g	79
5.3	OBTENÇÃO DOS DADOS EXPERIMENTAIS	81
5.4	CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA INTEGRADA	82
5.5	ALGORITMOS GENÉTICOS (AGs)	85
5.6	OTIMIZAÇÃO NÃO LINEAR	86
5.7	COMPARAÇÕES ENTRE MODELOS E COEFICIENTE R^2	87
6	APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	90
6.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS	90
6.2	RESULTADOS PARA TEMPERATURAS INDIVIDUAIS	93
6.2.1	Modelo de DF	93
6.2.2	Modelo GHM	103
6.3	RESULTADOS OBTIDOS PARA UM CONJUNTO DE TRÊS TEMPERATURAS	124
6.3.1	Modelo de DF	124
6.3.2	Modelo GHM	127
6.4	RESULTADOS OBTIDOS PARA UM CONJUNTO DE NOVE TEMPERATURAS	141
6.4.1	Modelo de DF	141
6.4.2	Modelo GHM	146
7	CONCLUSÃO	161
7.1	COMENTÁRIOS FINAIS	161
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	163
	REFERÊNCIAS	164
	APÊNDICE I	168
	APÊNDICE II	173

1 INTRODUÇÃO

Vibrações mecânicas podem ser de naturezas distintas. Em algumas situações podem ser de utilidade e benéficas, como por exemplo, as vibrações que auxiliam o fluxo de grãos em tremonhas e as vibrações geradas por instrumentos musicais. Contudo, por outro lado, elas também podem ser desagradáveis e indesejáveis, tanto do ponto de vista do conforto quanto do estrutural, como as vibrações causadas por prensas (devido aos impactos) e as originadas pelo vento em linhas de transmissão elétrica. Essas vibrações indesejadas acontecem, geralmente, quando, sobre um sistema, agem forças cujo espectro contém componentes significativos em uma ou mais frequências naturais do sistema, provocando amplitudes excessivas de movimento. Nesses casos, faz-se necessário o controle.

O controle de vibrações pode ser passivo, ativo ou ainda misto. O controle passivo, que se dá pela aplicação de forças de reação e/ou dissipação de energia, oferece as vantagens da não necessidade de aplicação de potência externa e do relativo baixo custo a ele associado. Nesse tipo de controle, os materiais viscoelásticos, particularmente os elastômeros, são largamente utilizados, em aplicações que vão das mais singelas às mais sensíveis. Essas aplicações incluem, dentre outras, equipamentos de laboratório, eletrodomésticos, motores, máquinas em geral, tubulações e componentes aeroespaciais, automotivos e navais.

Projetos de controle eficazes demandam o conhecimento preciso do comportamento, ou caracterização, desses materiais, em especial de suas propriedades dinâmicas, a saber, o módulo dinâmico de elasticidade e o correspondente fator de perda. Essas propriedades são dependentes, dentre outros fatores, da frequência e da temperatura, dependência essa que, em faixas de grande interesse, é bastante pronunciada.

Uma forma estabelecida e comumente usada de se descrever o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos, reunindo as propriedades anteriormente mencionadas, é a representação por módulos complexos. Cada módulo complexo desempenha um papel análogo ao seu correspondente da elasticidade clássica. Contudo, ele não só responde pelas características elásticas (parte real), como também pelas dissipativas (parte imaginária) (LOPES et al., 2004).

Os módulos complexos são geralmente determinados em dois estágios, um experimental e outro analítico e numérico. No estágio analítico e numérico, emprega-se um modelo

matemático, que é ajustado aos dados experimentais levantados no estágio anterior. Para uma descrição completa de seu comportamento dinâmico, o material viscoelástico deve ser ensaiado ao longo de amplas faixas de frequência e temperatura.

Duas abordagens principais para a modelagem matemática são, atualmente, objetos de especial atenção. São elas a abordagem por Derivadas Fracionárias, ou Generalizadas, e a abordagem via método GHM. A abordagem por derivadas fracionárias apresenta a capacidade de descrever o comportamento de muitos materiais viscoelásticos com um pequeno número de parâmetros (NASHIF et al., 1985), enquanto que a abordagem via GHM apresenta a vantagem de ter sido intencionalmente desenvolvida com equações dinâmicas de segunda ordem, o que a torna compatível com os métodos correntes de análise estrutural (VASCONCELOS e BATTISTA, 2004).

Almeja-se, no decorrer do presente trabalho, realizar um estudo sobre estes dois métodos e, após obtido um conhecimento teórico razoável, comparar o uso de cada um na caracterização dinâmica integrada de um material viscoelástico. Esta comparação é feita de forma gráfica e também utilizando-se indicadores numéricos. Para tanto, são utilizados dados de transmissibilidade de um sistema mecânico de 1 grau de liberdade, cujo material resiliente é uma borracha butílica, em uma faixa de frequências de 0Hz a 2000Hz e temperaturas entre -20°C e 60°C, com intervalos de 10°C.

O capítulo 2 apresenta conceitos gerais de caracterização dinâmica, partindo do conceito de material viscoelástico, expõe definições, como o módulo complexo de elasticidade, discute os efeitos de fatores ambientais sobre o comportamento de materiais viscoelásticos, relaciona o módulo de elasticidade ao módulo de cisalhamento e finaliza com a apresentação do princípio da superposição e do nomograma de frequência reduzida

Já o capítulo 3 destina-se a apresentar o modelo de derivadas fracionárias, com sua equação constitutiva. Nele, é feita uma análise qualitativa e quantitativa dos parâmetros do modelo, onde se apresentam gráficos demonstrando a influência de cada um dos parâmetros e suas respectivas regiões de atuação.

No capítulo 4, faz-se a introdução do modelo GHM, apresentando sua equação constitutiva e as suas diferentes formas, com análise de parâmetros, regiões de atuação e a aplicação de termos adicionais.

O capítulo 5 contempla os métodos experimentais e de otimização utilizados. Nele, encontram-se explicações sobre a obtenção dos dados experimentais, os algoritmos de otimização utilizados e os coeficientes de qualidade de ajuste. Apresenta-se também o

procedimento realizado para se obter a caracterização dinâmica do material de forma integrada.

O capítulo 6 apresenta os resultados do trabalho em forma de curvas e índices de qualidade de ajuste, devidamente comentados.

No capítulo 7, são expostas as conclusões e os comentários finais, além de propostas para futuros trabalhos.

Finalizando a estrutura do trabalho, o apêndice I mostra a modelagem de um sistema de um grau de liberdade via modelo GHM, enquanto o apêndice II contém o *wicket plot* e as propriedades dinâmicas de uma borracha butílica de composição típica.

2 CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA

Sistemas passivos de controle de vibrações que utilizam materiais viscoelásticos como provedores simultâneos de flexibilidade e dissipação de energia vibratória são comumente usados. Esses sistemas apresentam uma grande variedade de concepções, sendo que cada projeto de controle ainda possui suas próprias especificidades. A elaboração de um projeto exige o conhecimento das propriedades mecânicas do material a ser utilizado, sendo, então, esse conhecimento, ou caracterização, de crucial importância para se ter uma solução ótima do sistema de controle.

Pode-se definir os materiais elásticos lineares como os que se deformam sob tensão, mas retornam ao tamanho e forma originais quando a tensão é removida, obedecendo, à lei de Hooke, em que a tensão é diretamente proporcional à deformação. Já os fluidos viscosos podem ser definidos como aqueles que se deformam constantemente quando submetidos a uma tensão cisalhante, obedecendo à lei de Newton correspondente, que propõe que a tensão é proporcional à taxa de deformação com o tempo para os líquidos idealmente viscosos. Assim sendo, Ferry (1980) afirma que, de uma maneira geral, os materiais viscoelásticos podem ser entendidos como materiais cujo comportamento é uma combinação entre o comportamento elástico e o comportamento viscoso. O comportamento viscoso está relacionado à dissipação de energia, e o comportamento elástico ao armazenamento de energia.

Há, na literatura, algumas outras definições que, embora relacionadas à anterior são mais específicas. Segundo Lakes (1999), materiais viscoelásticos são aqueles em que a relação entre tensão e deformação é dependente do tempo. Já para Golla e Hughes (1985), um material viscoelástico é aquele caracterizado por uma relação constitutiva na qual a tensão instantânea não depende somente da deformação instantânea, mas também do histórico de deformação. Christensen (1982) expõe que a teoria da elasticidade descreve materiais que possuem a capacidade de armazenar energia mecânica sem dissipação, enquanto que um fluido viscoso newtoniano, em um estado de tensão não hidrostático, tem a capacidade de dissipar mas não armazenar energia. Porém, há materiais que fogem do escopo destas duas teorias, que são para os quais, parte do trabalho realizado (mas não todo) para efetuar sua deformação pode ser recuperado.

Uma forma muito bem estabelecida e muito utilizada para se descrever esse comportamento dos materiais viscoelásticos, para uso em problemas dinâmicos, é a representação por módulos complexos. Ela utiliza grandezas complexas que associam o armazenamento e a dissipação de energia com suas partes reais e imaginárias, respectivamente.

2.1 Módulo Dinâmico Complexo de Elasticidade

Segundo Pritz (1998), todo material sólido real apresenta propriedades elásticas e de amortecimento, onde entende-se por amortecimento a habilidade de dissipar energia mecânica durante uma deformação ou vibração de qualquer natureza. Tais propriedades podem ser apresentadas, em sua região linear, no domínio da frequência, por um número complexo, conhecido por módulo complexo de elasticidade, também chamado de módulo complexo de Young, \bar{E} .

Para materiais incompressíveis, o módulo complexo de elasticidade representa a relação dinâmica entre tensão e deformação, sendo, então, escrito sob a forma

$$\bar{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E_R + iE_I, \quad (2.1.1)$$

onde a parte real E_R está associada à energia armazenada, enquanto a parte imaginária E_I está associada à energia dissipada pelo material. O módulo real E_R é também conhecido como módulo dinâmico de elasticidade (SNOWDON, 1968).

Definindo-se o fator de perda como sendo $\eta_E = \frac{E_I}{E_R}$, o módulo complexo pode ser escrito como

$$\bar{E} = E_R (1 + i\eta_E). \quad (2.1.2)$$

O módulo dinâmico E_R e o fator de perda η_E são ditas propriedades dinâmicas do material viscoelástico.

2.2 Efeitos de Fatores Ambientais

As propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos variam de acordo com o meio. O conhecimento dessa variação é de fundamental importância para o bom desempenho do controle de vibração ou ruído irradiado. Essa variação oriunda de fatores do ambiente pode ser vista como uma vantagem no sentido de oferecer uma maior flexibilidade nos projetos (NASHIF et al., 1985).

Dentre os diversos fatores que provocam a alteração do comportamento do material, pode-se destacar: temperatura, efeitos de carregamento cíclico (frequência e amplitude), pré-carga estática, envelhecimento, exposição a óleos, vácuo e pressão. Será dada especial atenção, neste trabalho, à dependência dos materiais viscoelásticos com relação à temperatura e à frequência. Isso porque, para aplicações usuais de engenharia, estes fatores são os de maior importância na descrição de tais materiais.

2.2.1 Efeitos da Temperatura

A temperatura é usualmente considerada como o fator ambiental mais importante que afeta as propriedades dinâmicas dos materiais (NASHIF et al., 1985). A figura 2.1 mostra o efeito da temperatura sobre o material viscoelástico.

Notam-se quatro regiões distintas, sendo três delas de maior interesse. Na primeira região, chamada região vítrea, o módulo de elasticidade tem seu valor máximo enquanto o fator de perda apresenta valores extremamente baixos. O módulo nesta região muda lentamente com a temperatura, enquanto o fator de perda cresce consideravelmente com o aumento desta. Na segunda região, conhecida como região de transição, observa-se um acentuado decréscimo do módulo com o aumento da temperatura, enquanto o fator de perda alcança seu valor máximo. A terceira região, nomeada de região elástica, apresenta tanto o módulo quanto o fator de perda com baixos valores, variando lentamente com a temperatura.

Há ainda a quarta e última região, que é típica de materiais com baixo amortecimento, tal como esmaltes vítreos e termoplásticos. Nesta região, o módulo continua a decair com o aumento da temperatura, enquanto o fator de perda assume valores muito altos. Embora seja interessante para completar a caracterização, a região de fluência é de pouco uso no projeto de sistemas de controle por sua instabilidade e outras propriedades físicas não desejadas (NASHIF et al., 1985).

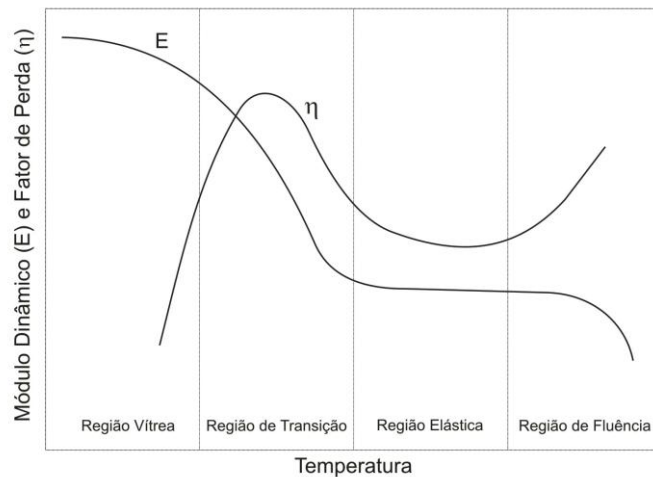


Figura 2.1 - Variação do módulo dinâmico e do fator de perda com a temperatura

2.2.2 Efeitos da Frequência

O efeito mais importante da frequência é que o módulo dinâmico sempre cresce com o seu aumento (NASHIF et al., 1985). Isso pode ser observado na figura 2.2.

Já o fator de perda aumenta com a frequência até um máximo, quando então, começa a diminuir. Esse ponto de máximo ocorre na chamada região de transição e corresponde à maior inclinação da curva do módulo dinâmico, que cresce muito nessa região. À frequência em que ocorre o máximo fator de perda dá-se o nome de frequência de transição.

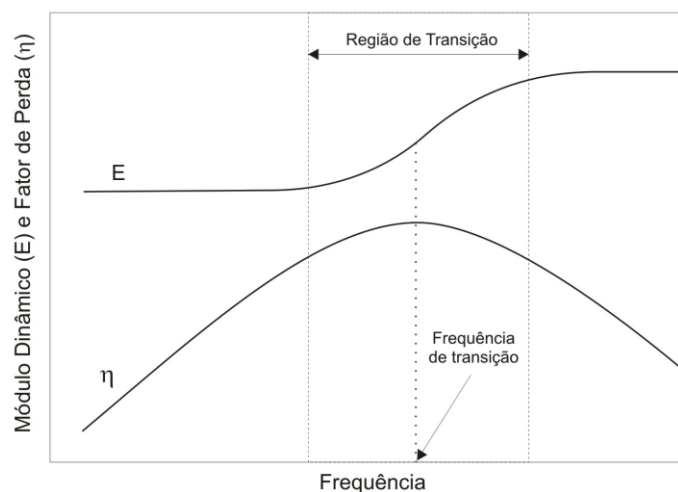


Figura 2.2 - Variação do módulo dinâmico e do fator de perda com a frequência

2.2.3 Notação Completa do Módulo Complexo

Face à dependência dos materiais viscoelásticos quanto à temperatura e frequência, pode-se escrever a equação (2.1.2) de uma forma mais completa, qual seja

$$\bar{E}(\Omega, T) = E_R(\Omega, T)[1 + i\eta_E(\Omega, T)], \quad (2.2.1)$$

onde T é a temperatura e Ω a frequência circular.

2.3 Módulo Complexo de Cisalhamento

Da teoria da elasticidade, sabe-se que o módulo de cisalhamento (G) relaciona-se com o módulo de Young, para materiais isotrópicos e elástico-lineares, pela seguinte equação:

$$E = 2G(\nu + 1), \quad (2.3.1)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, que expressa a relação entre as deformações lateral e longitudinal do material.

Como exposto por Snowdon (1968), há dois tipos fundamentais de deformação que um material pode sofrer: cisalhamento puro, em que ele sofre variação de forma, mas não de volume; e volumétrica, em que o material sofre variação de volume, mas não de forma. Decorre que,

$$E = \frac{9BG}{(3B + G)}, \quad (2.3.2)$$

onde B é o módulo volumétrico do material.

Para materiais viscoelásticos, $B \gg G$. Logo, a equação (2.3.2) pode ser simplificada, de forma que

$$E \approx 3G. \quad (2.3.3)$$

A equação (2.3.3) utilizada na equação (2.3.1) determina o valor aproximado do coeficiente de Poisson $\nu \approx 0,5$. Quando $B \gg G$ o material é dito incompressível.

Considere-se, agora, a expressão do módulo complexo de cisalhamento, escrita de forma semelhante à do módulo complexo de Young, de modo que

$$\bar{G} = G_R + iG_I, \quad (2.3.4)$$

onde G_R é a parte real do módulo de cisalhamento, associada à energia armazenada, e G_I é a parte imaginária do módulo de cisalhamento, associada à energia dissipada.

O fator de perda ao cisalhamento, η_G , é definido como $\eta_G = \frac{G_I}{G_R}$.

Assim, de forma semelhante à equação (2.1.2) o módulo complexo de cisalhamento pode ser escrito como

$$\bar{G} = G_R(1 + i\eta_G) \quad (2.3.5)$$

sendo sua representação completa em função de temperatura e frequência dada por

$$\bar{G}(\Omega, T) = G_R(\Omega, T)[1 + i\eta_G(\Omega, T)], \quad (2.3.6)$$

onde, recorda-se, T é a temperatura e Ω a frequência circular.

Em analogia com as relações da elasticidade clássica, expostas no início da seção, Snowdon (1968) afirma que $E_R \approx 3G_R$ e $E_I \approx 3G_I$, de modo que $\eta_E = \eta_G$. Assim $\bar{E} \approx 3\bar{G}$.

A variação de G e η_G com a temperatura e a frequência se dá de forma semelhante à exposta anteriormente para E e η_E .

2.4 Princípio da Superposição e Nomograma de Frequência Reduzida

Face ao exposto até aqui, decorre que o conhecimento cabal do comportamento dinâmico de um dado material viscoelástico só pode ser obtido após esse ser ensaiado ao longo de amplas faixas de frequência e temperatura. Via de regra, o que resulta dos diversos procedimentos experimentais existentes é um conjunto de curvas, em uma banda de

frequência característica do procedimento empregado, estando cada curva associada a uma temperatura de ensaio (JONES, 1993; LOPES et al. 2004). A figura 2.3 apresenta curvas de módulo real (dinâmico) de cisalhamento e de fator de perda para várias temperaturas, em uma determinada faixa de frequências.

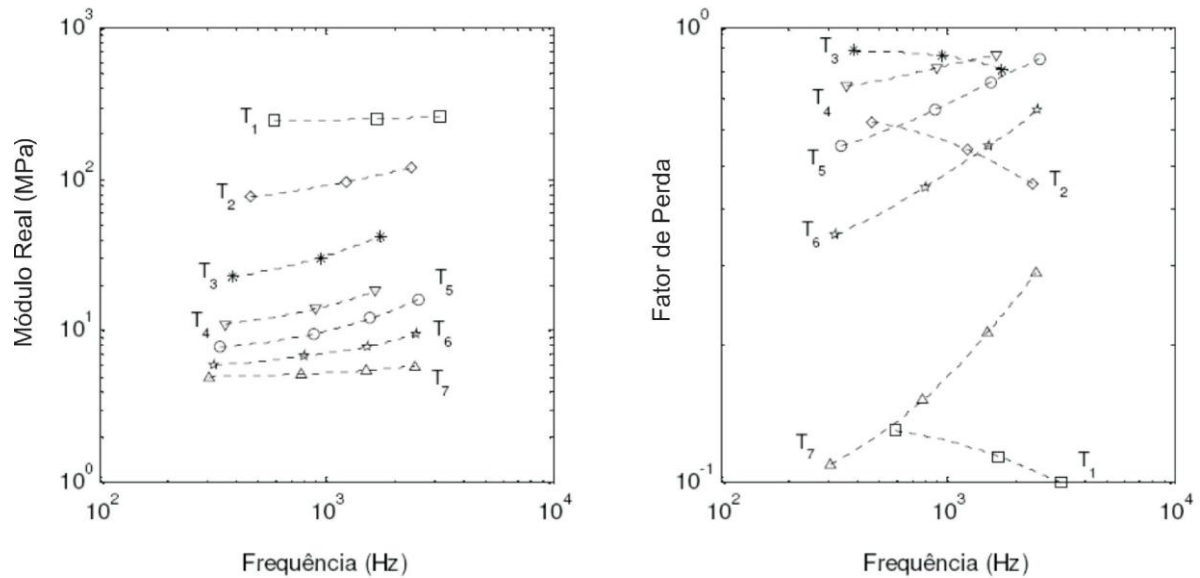


Figura 2.3 - Gráficos de propriedades dinâmicas medidas
(Fontes: NASHIF et al., 1985; ESPÍNDOLA, 1990)

De posse das características que fornecem as curvas da figura 2.3, gráficos do fator de perda versus o módulo real de cisalhamento, para cada temperatura de ensaio, podem ser construídos. Esse tipo de gráfico, que recebe o nome de *wicket plot* (ASTM E756-98, 1998), é ilustrado na figura 2.4.

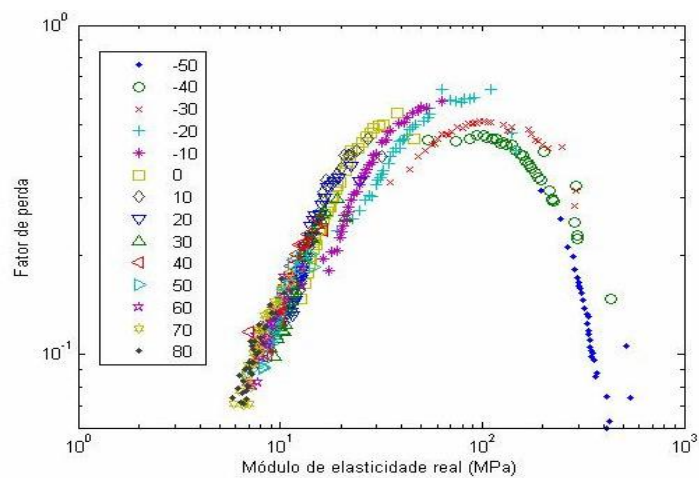


Figura 2.4 - Wicket plot

Para diversos materiais de interesse, a chave para se obter uma caracterização dinâmica ampla, a partir de dados experimentais limitados, é o chamado princípio de superposição frequência-temperatura (FERRY, 1980; NASHIF et al., 1985; LOPES et al., 2004). Pela aplicação desse princípio, pode-se, por exemplo, a partir de um teste feito na faixa de frequência de 100 a 1000Hz e com temperaturas entre 0°C e 100°C, obter valores de propriedades dinâmicas na temperatura de 50°C e na frequência de 2Hz (NASHIF et al., 1985).

Partindo da observação de que os efeitos de frequência e temperatura em materiais viscoelásticos são qualitativa e reciprocamente equivalentes, esse princípio estabelece que as diversas curvas de propriedades dinâmicas podem ser superpostas, em uma temperatura de referência qualquer, por meio de deslocamentos em frequência apropriados, formando, assim, duas curvas mestre únicas, uma para cada propriedade.

Matematicamente, tem-se que

$$G_{R_F}(\Omega_r) = (T_F \rho_F / T \rho) G_R(\Omega, T) \quad (2.4.1)$$

e

$$(\eta_G)_F(\Omega_r) = \eta_G(\Omega, T), \quad (2.4.2)$$

onde $\Omega_r = \alpha_T(T)\Omega$ é a frequência reduzida, α_T é o fator de deslocamento (que depende da temperatura e cujos valores são $0 < \alpha_T < 1$, para $T > T_F$, $\alpha_T = 1$, para $T = T_F$, e $\alpha_T > 1$, para $T < T_F$), T_F é a temperatura de referência (em escala absoluta), ρ é a densidade do material e ρ_F é a densidade do material à temperatura de referência.

As expressões acima estabelecem que, exceto por um fator $(T_F \rho_F / T \rho)$ para o módulo real de cisalhamento (via de regra, desprezável), as propriedades dinâmicas obtidas a uma frequência Ω e temperatura T são iguais às propriedades dinâmicas a uma frequência composta Ω_r e a uma temperatura T_F . Embora a temperatura de referência seja arbitrária, sua escolha, para um certo conjunto de dados experimentais, terá influência na qualidade da representação final obtida (LOPES et al., 2004).

A determinação do fator de deslocamento α_T é de crucial importância para o processo de consolidação das curvas e consiste em se estimar os valores que fazem com que as curvas parciais se desloquem em frequência, de tal modo que superposições completas sejam alcançadas na temperatura de referência (FERRY,1980; LOPES et al., 2004).

O comportamento do fator de deslocamento α_T em temperatura pode ser modelado de diversas formas, dentre elas através de uma equação empírica, consistente com a experiência e conhecida como equação WLF (Williams-Landel-Ferry). Por essa equação,

$$\log_{10} \alpha_T(T) = \frac{-\theta_1(T - T_F)}{\theta_2 + T - T_F}, \quad (2.4.3)$$

onde θ_1 e θ_2 são parâmetros a serem determinados para cada material, T é a temperatura de ensaio cuja curva sofre deslocamento e T_F é a temperatura de referência.

A equação WLF é empregada neste trabalho por já se dispor de uma maior experiência no seu uso, principalmente no tocante à obtenção de estimativas iniciais de seus parâmetros.

Um gráfico típico de fator de deslocamento pode ser visto na figura 2.5.

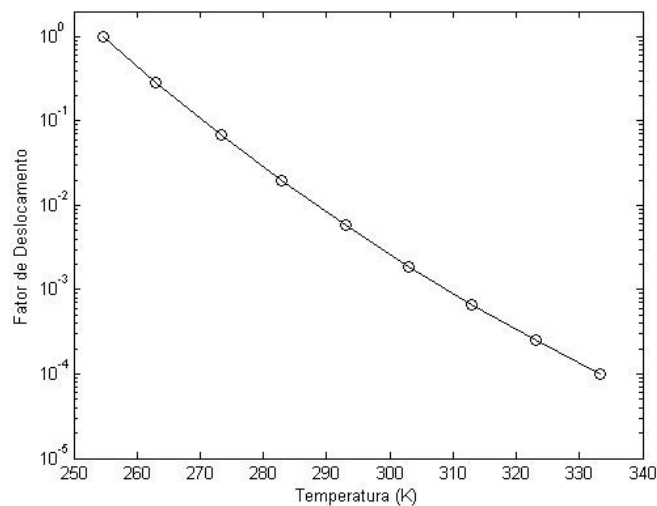


Figura 2.5 - Fator de deslocamento x temperatura

Uma vez consolidadas, as propriedades dinâmicas (módulo real e fator de perda) são exibidas de forma padronizada (ISO 10112, 1991), em nomogramas conhecidos como

nomogramas de frequência reduzida (LOPES et al., 2004). Um desses nomogramas é mostrado na figura 2.6. Os nomogramas facilitam a obtenção das propriedades, pois permitem que os valores desejados sejam determinados diretamente do gráfico, não sendo necessário, antes, calcular valores de frequência reduzida, para então se chegar às respectivas propriedades (NASHIF et al., 1985).

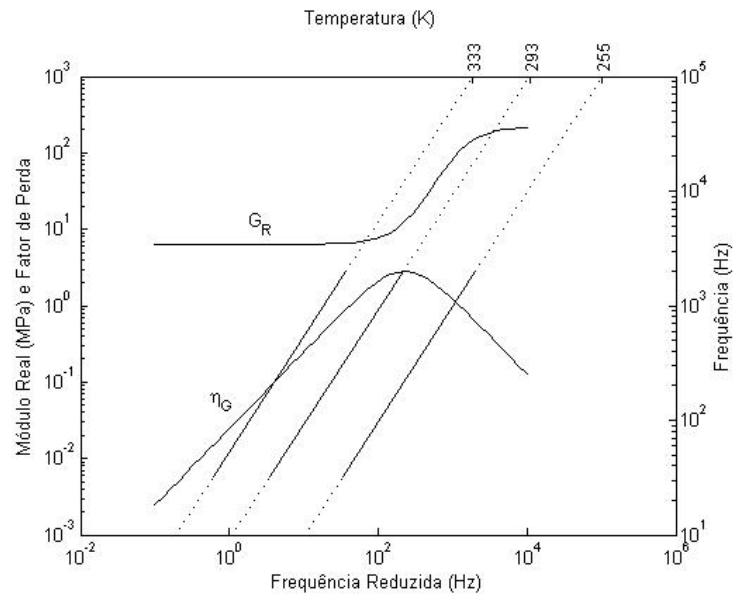


Figura 2.6 - Nomograma de frequência reduzida

3 MODELO DE DERIVADAS FRACIONÁRIAS (DF)

Ajustar modelos matemáticos a curvas experimentais é uma prática corriqueira e valiosa para a descrição das propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos com relação à frequência. A introdução do cálculo fracionário como modelo teórico de viscoelasticidade resulta em uma poderosa ferramenta para se representar o comportamento dinâmico de polímeros e outros materiais, para além dos modelos elementares anteriormente expostos (PRITZ, 2003).

Inicialmente, a partir da generalização dos modelos elementares (NASHIF et al., 1985), as equações constitutivas de materiais viscoelásticos foram sendo desenvolvidas com base na noção clássica de derivadas (em relação ao tempo) de ordem inteira. Essas equações constitutivas continham muitos parâmetros a serem identificados, o que tornou o procedimento inconveniente do ponto de vista computacional.

Ao longo das últimas décadas, contudo, o conceito de derivadas fracionárias (ou generalizadas) ganhou a reputação de ser uma ferramenta extremamente adequada ao modelo de materiais viscoelásticos. A equação constitutiva para materiais viscoelásticos em derivadas fracionárias, também apresenta, aparentemente, muitos parâmetros. Porém, isto é enganoso. O modelo de derivadas fracionárias descreve tão bem o comportamento reológico de materiais viscoelásticos que apenas quatro parâmetros são suficientes para representar um determinado material. Esse fato implica em consequências bastante vantajosas quanto à abordagem em questão (ESPÍNDOLA et al., 2005).

3.1 A Equação Constitutiva do Modelo de DF

O modelo generalizado, colocado sob a forma de derivadas de ordem fracionária, fornece uma equação constitutiva unidimensional para materiais viscoelásticos, considerando-se uma temperatura ambiente constante, dada pela expressão

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^{\beta_m} [\sigma(t)] = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n D^{\alpha_n} [\varepsilon(t)], \quad (3.1.1)$$

onde b_m , β_m , E_0 , E_n e α_n são parâmetros do material no domínio do tempo, sendo que m varia de 1 a M e n varia de 1 a N .

No modelo acima, D^{β_m} e D^{α_n} são derivadas fracionárias, sendo que uma derivada fracionária de ordem α , com $0 < \alpha < 1$, é definida como (BAGLEY e TORVIK, 1983; NASHIF et al., 1985; ESPÍNDOLA et al. 2005)

$$D^\alpha[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (3.1.2)$$

onde Γ é a função gama e φ uma variável de integração.

Na prática, tomando-se M e N iguais a 1 na equação constitutiva, já se obtém uma representação satisfatória do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos. Isso resulta em uma modelagem matemática que utiliza apenas cinco parâmetros, qual seja

$$\sigma(t) + bD^\beta[\sigma(t)] = E_0\varepsilon(t) + E_1D^\alpha[\varepsilon(t)]. \quad (3.1.3)$$

A transformada de Fourier dessa derivada fracionária de ordem α ($0 < \alpha < 1$) é (SAMKO et al., 1987 apud CRUZ, 2004)

$$F\{D^\alpha[f(t)]\} = (i\Omega)^\alpha F\{f(t)\}, \quad (3.1.4)$$

onde a transformada de Fourier é definida como

$$\bar{F}(\Omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\Omega t} dt. \quad (3.1.5)$$

Aplicando a transformada de Fourier aos dois lados da equação (3.1.3), chega-se a

$$\bar{E}(\Omega) = \frac{\bar{\sigma}(\Omega)}{\bar{\varepsilon}(\Omega)} = \frac{E_0 + E_1 b(i\Omega)^\alpha}{1 + b(i\Omega)^\beta}. \quad (3.1.6)$$

A expressão correspondente para o módulo complexo de cisalhamento é

$$\bar{G}(\Omega) = \frac{\bar{\tau}(\Omega)}{\bar{\gamma}(\Omega)} = \frac{G_0 + G_1 b(i\Omega)^\alpha}{1 + b(i\Omega)^\beta}. \quad (3.1.7)$$

com $E_0 \approx 3G_0$ e $E_1 \approx 3G_1$, de modo que $\bar{E}(\Omega) \approx 3\bar{G}(\Omega)$, como mostrado anteriormente.

Bagley e Torvik (1986) sustentam que um modelo de comportamento viscoelástico deve prever um trabalho interno e uma taxa de dissipação de energia não negativos. Essas restrições termodinâmicas implicam em $\alpha = \beta$ nas equações (3.1.6) e (3.1.7).

Assim sendo as equações (3.1.6) e (3.1.7) devem ser escritas com quatro parâmetros, de forma que

$$\bar{E}(\Omega) = \frac{\bar{\sigma}(\Omega)}{\bar{\epsilon}(\Omega)} = \frac{E_0 + E_1 b(i\Omega)^\beta}{1 + b(i\Omega)^\beta} \quad (3.1.8)$$

e

$$\bar{G}(\Omega) = \frac{\bar{\tau}(\Omega)}{\bar{\gamma}(\Omega)} = \frac{G_0 + G_1 b(i\Omega)^\beta}{1 + b(i\Omega)^\beta}. \quad (3.1.9)$$

O modelo de derivadas fracionárias com quatro parâmetros é comprovadamente apropriado para se prever o comportamento dinâmico de materiais poliméricos ao longo uma vasta faixa de frequência. Esse modelo é robusto e possui uma base teórica sólida. Porém, ele não é capaz de descrever a assimetria do pico do fator de perda e nem o comportamento dinâmico em altas frequências (PRITZ, 2003).

3.2 Análise dos Parâmetros do Modelo de DF

Nesta seção, é feita uma análise da influência de cada parâmetro do modelo de DF sobre as curvas de módulo real de cisalhamento e fator de perda ao cisalhamento. Esta análise fornece uma ideia qualitativa sobre a forma e a intensidade da influência de cada parâmetro.

O procedimento aqui realizado foi feito fixando-se valores hipotéticos (valores plausíveis, com base na literatura) para os parâmetros G_0 , G_1 , b , e β da equação

(3.1.9). Assim, as curvas base de módulo real de cisalhamento e fator de perda ao cisalhamento, vistas nas figuras 3.1 e 3.2, possuem os seguintes valores:

Tabela 3.1 - Valores base do modelo de DF

Parâmetros	Valores
G_0	$5 \cdot 10^7$ Pa
G_1	$5 \cdot 10^9$ Pa
b	$2,8 \cdot 10^{-4} \text{ s}^\beta$
β	0,64

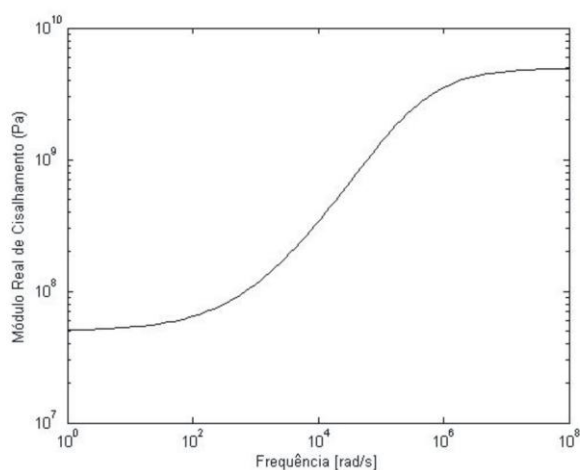


Figura 3.1- Módulo real de cisalhamento via DF

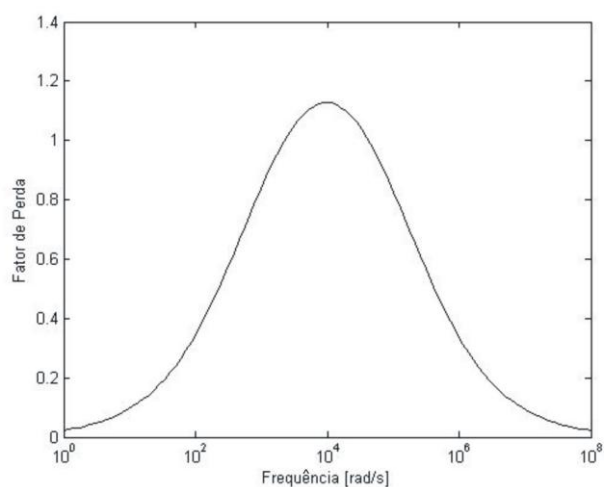


Figura 3.2- Fator de perda via DF

3.2.1 Influência do Parâmetro G_0

Mantendo todos os demais parâmetros do modelo de DF fixos, de acordo com os valores base da tabela 3.1, e variando apenas o valor de G_0 , sendo que $G_{01} = 0,5G_0$ e $G_{02} = 2G_0$, obtem-se as curvas apresentadas nas figuras 3.3 e 3.4.

As curvas obtidas mostram que quanto maior o valor de G_0 maiores serão os valores para o módulo dinâmico do material abaixo da frequência de transição. Em particular, há um aumento no valor assintótico inferior de G_R . Com relação ao fator de perda, observa-se um ligeiro deslocamento do pico para a direita com o aumento do parâmetro analisado, além de uma redução parcial de magnitudes nos valores dessa propriedade.

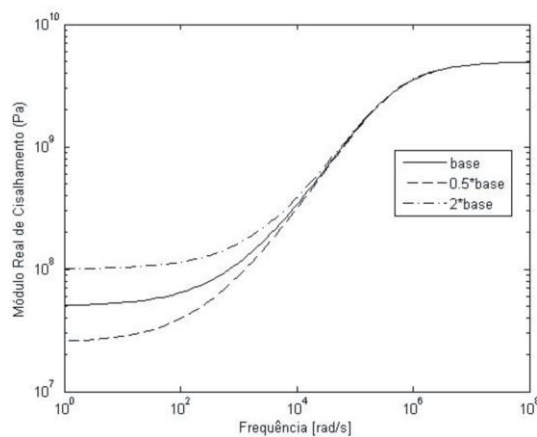


Figura 3.3 - Variação do módulo real de cisalhamento com G_0

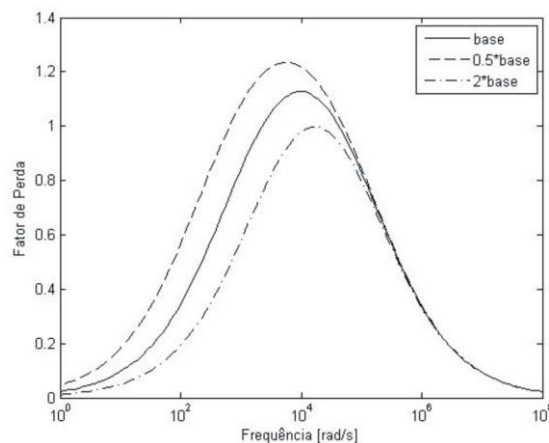


Figura 3.4 - Variação do fator de perda com G_0

3.2.2 Influência do Parâmetro G_1

Procedendo da mesma forma, altera-se agora o parâmetro G_1 , com todos os demais valores sendo mantidos fixos (valores base). A variação de G_1 é tal que $G_{11} = 0,5G_1$ e $G_{12} = 2G_1$.

As curvas obtidas, ilustradas nas figuras 3.5 e 3.6, mostram que G_1 é determinante nos valores do módulo dinâmico nas regiões de transição e vítrea, em especial no valor assintótico superior de G_R . À medida que G_1 aumenta, maiores são os valores do fator de perda abaixo da frequência de transição, com ligeiros deslocamentos do pico para a esquerda.

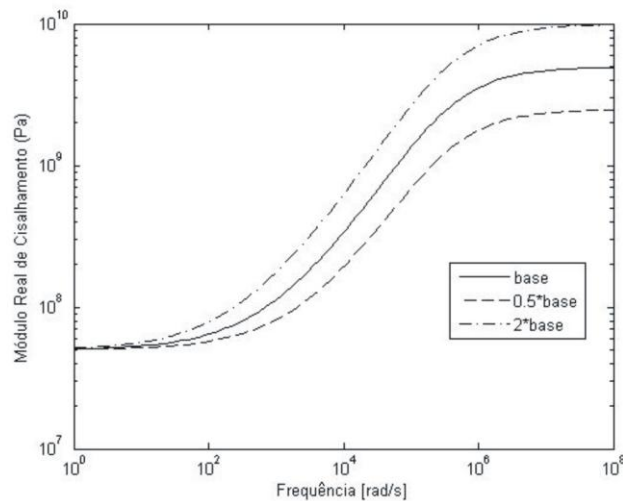


Figura 3.5 - Variação do módulo real de cisalhamento com G_1

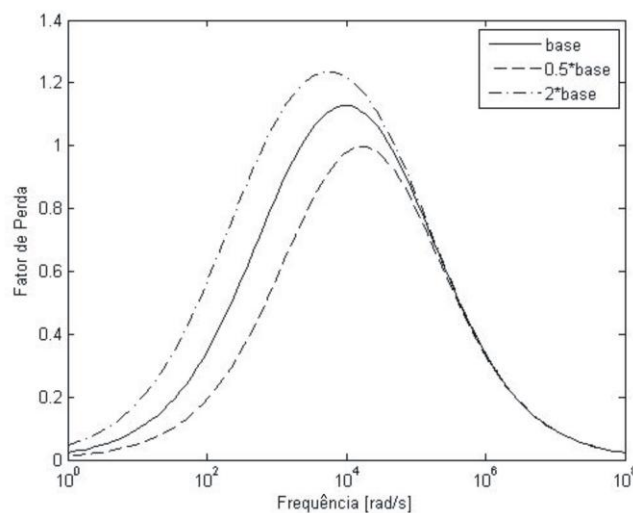


Figura 3.6 - Variação do fator de perda com G_1

3.2.3 Influência do Parâmetro b

Alteram-se agora os valores do parâmetro b , tal que $b_1 = 0,5b$ e $b_2 = 2b$. As curvas obtidas, apresentadas nas figuras 3.7 e 3.8, mostram claramente que o parâmetro b é responsável por um deslocamento horizontal, tanto do módulo real de cisalhamento quanto do fator de perda. À medida que b aumenta, ambas as curvas são deslocadas para a esquerda, ou seja, a região de transição é reposicionada de acordo com os valores de b . Consequentemente, a frequência de transição também o é.

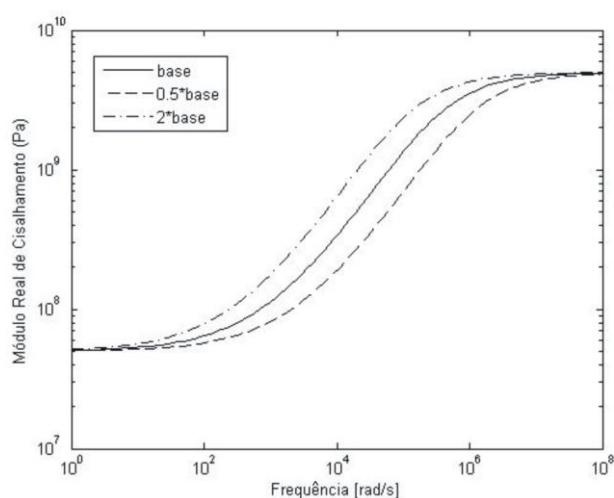


Figura 3.7 - Variação do módulo real de cisalhamento com b

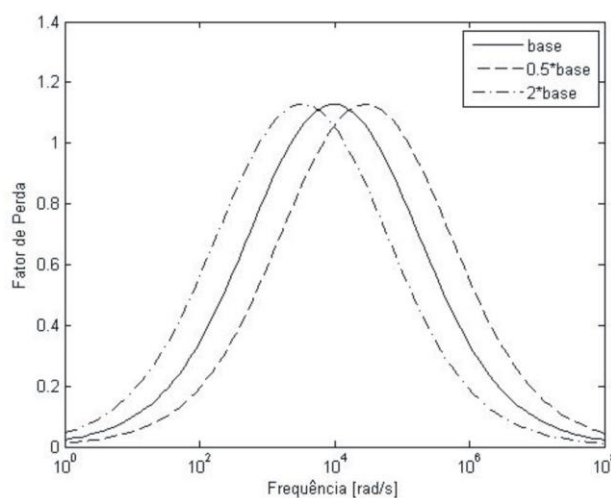


Figura 3.8 - Variação do fator de perda com b

3.2.4 Influência do Parâmetro β

Por fim, analisa-se a influência do parâmetro β . As curvas se mostram bastante sensíveis a mudanças nesse parâmetro (que corresponde à ordem da derivada fracionária). Por conta disso, os valores escolhidos para β_1 e β_2 fogem do padrão adotado para todos os outros parâmetros, em que eram usados valores que correspondiam à metade e ao dobro dos valores estabelecidos como valores base. Para a análise da influência de β , foram utilizados $\beta_1 = \beta - 0,1$ e $\beta_2 = \beta + 0,1$.

Percebe-se, da observação das figuras 3.9 e 3.10, que esse parâmetro altera não só a inclinação da curva do módulo de cisalhamento na região de transição, mas também o valor e a localização do pico do fator de perda. À medida que β aumenta, a inclinação do módulo de cisalhamento na região de transição é maior, o que é acompanhado pelo aumento e pelo deslocamento para a esquerda do pico do fator de perda.

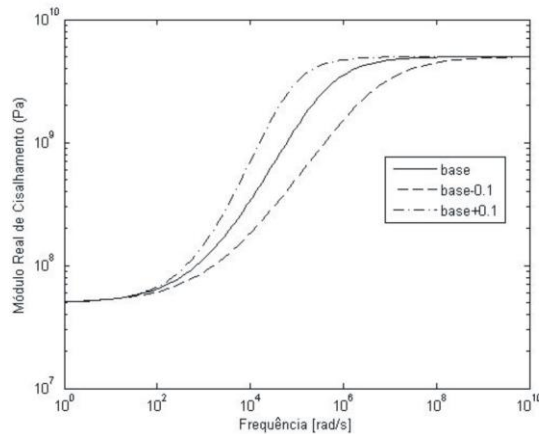


Figura 3.9 - Variação do módulo real de cisalhamento com β

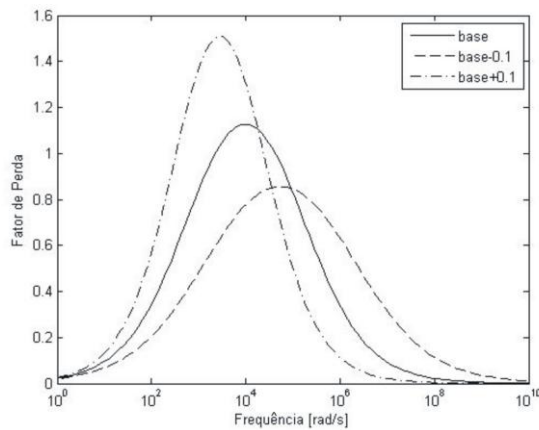


Figura 3.10 - Variação do fator de perda com β

3.3 Região de Busca no Modelo de DF

Para que seja feito um ajuste rápido e eficaz na determinação dos parâmetros de cada modelo, é interessante que se tenha uma ideia quantitativa e qualitativa dos mesmos. Logo, a observação das características das funções que definem o módulo dinâmico real (E_R ou G_R) e o fator de perda (η_E ou η_G), para estabelecer um espaço de busca de valores dos parâmetros, é um importante passo no processo de ajuste dos modelos às curvas experimentais.

A equação (3.1.9), que representa o módulo complexo de cisalhamento via DF, tem sua parte real representada por (LOPES, 1998)

$$G_R(\Omega) = \frac{G_1(b\Omega^\beta)^2 + (G_1 + G_0)\cos(\beta\pi/2)b\Omega^\beta + G_0}{(b\Omega^\beta)^2 + 2\cos(\beta\pi/2)b\Omega^\beta + 1} \quad (3.3.1)$$

e sua parte imaginária por

$$G_I(\Omega) = \frac{(G_1 - G_0)\sin(\beta\pi/2)b\Omega^\beta}{(b\Omega^\beta)^2 + 2\cos(\beta\pi/2)b\Omega^\beta + 1}. \quad (3.3.2)$$

Logo, o fator de perda é dado pela seguinte expressão:

$$\eta(\Omega) = \frac{G_I}{G_R} = \frac{(G_1 - G_0)\sin(\beta\pi/2)b\Omega^\beta}{G_1(b\Omega^\beta)^2 + (G_1 + G_0)\cos(\beta\pi/2)b\Omega^\beta + G_0}. \quad (3.3.3)$$

O módulo real, para baixas frequências, situa-se na região elástica, enquanto que para altas frequências, situa-se na região vítrea (LOPES, 1998). Isso quer dizer que

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} G_R = G_R(0) = G_0 \quad (3.3.4)$$

e

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} G_R = G_R(\infty) = G_1. \quad (3.3.5)$$

Cabe aqui dar ênfase ao fato das expressões acima confirmarem o que pode ser observado graficamente na análise prévia do modelo de DF.

Para valores usuais dos parâmetros em questão (G_0 , G_1 , b e β), observa-se, também na região de transição, que $G_R(\Omega) \propto \Omega^\beta$ (o que também foi observado previamente) e

$G_I(\Omega) \propto \Omega^\beta$ (LOPES, 1998). Isso significa que $r_a \Omega = \frac{G_R \Omega}{G_R \Omega_a} = \left(\frac{\Omega}{\Omega_a} \right)^\beta = \varepsilon_a^\beta$, apontando

um erro conceitual encontrado em Snowdon (1968) e Bavastri (1997), entre outros, que afirmam que para um material viscoelástico na região de transição

$r_a \Omega = \frac{G_R \Omega}{G_R \Omega_a} = \left(\frac{\Omega}{\Omega_a} \right) = \varepsilon_a$. Na exposição anterior Ω_a é uma frequência de projeto de

dispositivo viscoelástico localizada na região de transição e r_a e ε_a são parâmetros adimensionais de projeto.

O valor máximo do fator de perda é encontrado derivando-se a expressão (3.3.3) e igualando o resultado a 0 (zero). Feito isso, chega-se à frequência em que o valor do fator de perda é máximo, também conhecida como frequência de transição Ω_t . Esse valor é

$$\Omega_t = e^{\frac{1}{2} \left[\frac{\ln \left(\frac{G_0}{G_1 b^2} \right)}{\beta} \right]}, \quad (3.3.6)$$

que pode ser rearranjado para fornecer

$$\Omega_t^\beta = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{G_0}{G_1}}. \quad (3.3.7)$$

A equação (3.3.7), utilizada na equação (3.3.3), fornece o fator de perda máximo, dado, então, por (SNOWDON, 1968; LOPES, 1998)

$$\eta_{\max} = \frac{\left(1 - \frac{G_0}{G_1} \right)}{1 + \frac{G_0}{G_1} + \frac{2\sqrt{G_0/G_1}}{\cos(\beta\pi/2)}} \tan(\beta\pi/2). \quad (3.3.8)$$

Novamente levando em consideração valores corriqueiros dos parâmetros do modelo de DF, chega-se à

$$\eta_{\text{máx}} \cong \tan\left(\frac{\beta\pi}{2}\right) \quad (3.3.9)$$

ou

$$\beta \cong \left[\frac{2}{\pi} \arctan \eta_{\text{máx}} \right]. \quad (3.3.10)$$

Da expressão (3.3.7), decorre que

$$b = \frac{1}{\Omega_t^\beta} \sqrt{\frac{G_0}{G_1}}. \quad (3.3.11)$$

Com base nas considerações acima, entende-se que, num processo de ajuste, as estimativas para os parâmetros G_0 , G_1 , b e β podem ser buscadas numa região, por exemplo, uma ordem de grandeza abaixo e uma ordem de grandeza acima dos valores fornecidos pelas expressões (3.3.4), (3.3.5), (3.3.10) e (3.3.11). Esses valores, aliás, podem ser usados como estimativas iniciais.

4 O MODELO GHM (GOLLA-HUGHES-MCTAVISH)

O método proposto por Golla, Hughes e McTavish (GOLLA e HUGHES, 1985; MCTAVISH, 1988; MCTAVISH e HUGHES, 1993) procura contornar os efeitos da dependência das propriedades de materiais viscoelásticos em relação à frequência, introduzindo um modelo do módulo complexo do material no domínio de Laplace, para depois trazê-lo para o domínio do tempo.

O resultado é bem adequado à modelagem por elementos finitos, pelo fato do modelo ter sido desenvolvido intencionalmente para uso em equações dinâmicas de segunda ordem. A principal vantagem está no fato dessa abordagem ser compatível com os métodos correntes de análise estrutural (VASCONCELOS e BATISTA, 2004).

4.1 A Equação Constitutiva do Modelo GHM

Considere-se uma estrutura unidimensional simples, sujeita a uma torção N e um ângulo de torção ϕ , tal como mostrado na figura 4.1 (a). O ângulo de torção ϕ está associado a uma deformação por cisalhamento γ (HIBBELER, 2008). A existência de uma função relaxação $G(t)$ do material da estrutura é proposta, sendo que $G(t)$ é a tensão correspondente a uma deformação cisalhante tipo degrau unitário, aplicada em $t=0$ (vide figura 4.1 (b)).

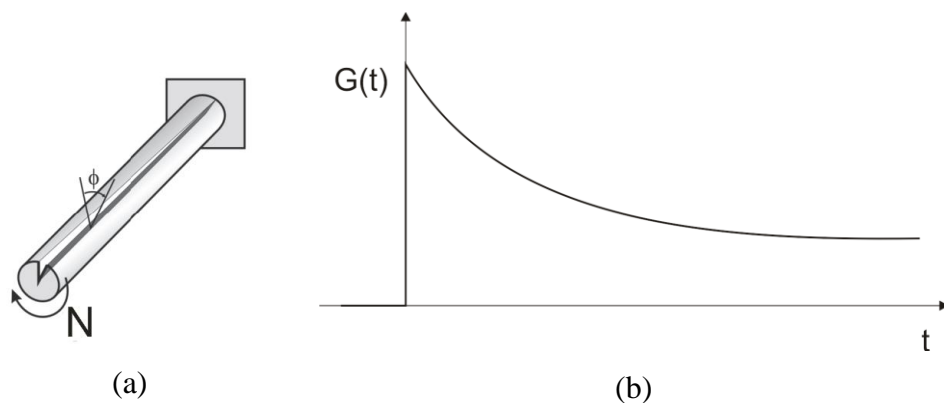


Figura 4.1 - (a) Estrutura unidimensional sob deformação (b) Função relaxação $G(t)$ (tensão para uma deformação tipo degrau unitário)

Se uma pequena deformação cisalhante $\Delta\gamma$ é repentinamente aplicada no tempo $t = 0$, a tensão resultante, assumindo que o material estava previamente relaxado, é

$$\Delta\tau(t) = G(t - \varphi)\Delta\gamma. \quad (4.1.1)$$

A relaxação do material é ainda assumida como sendo linear, de modo que se uma série de pequenas deformações discretas aditivas $\Delta\gamma_i$ são aplicadas em vários instantes de tempo φ_i , tem-se a deformação em função do tempo dada pela expressão

$$\gamma(t) = \sum_i \Delta\gamma(\varphi_i)\mu(t - \varphi_i). \quad (4.1.2)$$

Assumindo que, em algum momento do passado, o material estava relaxado, então a história correspondente de tensão é

$$\tau(t) = \sum_i G(t - \varphi_i)\Delta\gamma(\varphi_i). \quad (4.1.3)$$

A dependência do tempo apresentada pela função relaxação $G(t)$ descreve a “memória” do material às deformações passadas.

Pode-se estender os desenvolvimentos acima para o caso de uma história de deformação contínua, tornando, arbitrariamente, os φ_i próximos uns dos outros enquanto $\Delta\gamma(\varphi_i) \rightarrow d\gamma(\varphi_i)$. Assim, o somatório da equação (4.1.3) assume a forma de uma integral, qual seja, uma integral de convolução de Stieltjes, entre G e γ . Supondo a causalidade do sistema, isto é, $G(t - \varphi) = 0$ se $t < \varphi$, pode-se escrever a integral com o limite superior igual a t e o limite inferior igual a 0 (zero), uma vez que $\gamma(t) = 0$ para $t \leq 0$. Assim sendo,

$$\tau(t) = \int_0^t G(t - \varphi)d\gamma(\varphi). \quad (4.1.4)$$

A integral de Stieltjes acima pode ser escrita como uma integral ordinária, ou de Riemann, sob a forma

$$\tau(t) = \int_0^t G(t - \varphi) \frac{d}{d\varphi} \gamma(\varphi) d\varphi. \quad (4.1.5)$$

Em Moschen (2006), observa-se que o módulo de relaxação pode ser escrito como a soma de uma constante e uma parte dependente do tempo (separação do módulo de equilíbrio), tal que

$$G(t) = G_0\mu(t) + H(t), \quad (4.1.6)$$

onde $\mu(t)$ é uma função degrau unitário e a constante $G_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} G(t)$ é o módulo de equilíbrio elástico do material.

Substituindo a expressão (4.1.6) em (4.1.5) tem-se

$$\tau(t) = \int_0^t G_0\mu(t-\varphi) + H(t-\varphi) \frac{d}{d\varphi} \gamma(\varphi) d\varphi, \quad (4.1.7)$$

que pode ser conduzida para

$$\tau(t) = G_0\gamma(t) + \int_0^t H(t-\varphi) \frac{d}{d\varphi} \gamma(\varphi) d\varphi. \quad (4.1.8)$$

A transformação do domínio do tempo para o domínio de Laplace é feita via transformada de Laplace, que, segundo Papoulis (1962), é definida por

$$\bar{F}(s) = \mathcal{L} \{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\int_0^y f(t)e^{-st} dt \right], \quad (4.1.9)$$

sendo que $f(t)$ é uma função real ou complexa, definida para todo $t \geq 0$ e a variável s é um número complexo da forma $s = p + iv$.

Para derivadas de ordem inteira, vale a seguinte relação:

$$\mathcal{L} \{D^\phi f(t)\} = s^\phi \mathcal{L} \{f(t)\} - \sum_{k=0}^{\phi-1} s^k D^{\phi-1-k} f(0^+), \quad \phi = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.1.10)$$

A aplicação da transformada de Laplace em (4.1.5) leva à seguinte relação entre tensão e deformação

$$\bar{\tau}(s) = s\bar{G}_s(s)\bar{\gamma}(s), \quad (4.1.11)$$

onde $s\bar{G}_s(s)$ é designada como a função módulo do material.

Aplicando a transformada de Laplace também na expressão (4.1.8), obtém-se a mesma relação tensão-deformação, sob uma forma diferente, tal que

$$\bar{\tau}(s) = \left[G_0 + s\bar{H}(s) \right] \bar{\gamma}(s). \quad (4.1.12)$$

Igualando (4.1.11) a (4.1.12), chega-se à uma expressão que define o módulo de cisalhamento no domínio de Laplace, em função do módulo de equilíbrio elástico, G_0 , e uma função dissipação, $s\bar{H}(s)$, de modo que

$$s\bar{G}_s(s) = \left[G_0 + s\bar{H}(s) \right]. \quad (4.1.13)$$

Fazendo $s\bar{G}_s(s) = \bar{G}(s)$ e $s\bar{H}(s) = \bar{h}(s)$, a equação (4.1.13) pode ser reescrita como

$$\bar{G}(s) = \left[G_0 + \bar{h}(s) \right]. \quad (4.1.14)$$

A função dissipação $\bar{h}(s)$ possui diversas formas, propostas por vários autores. Algumas dessas formas são apresentadas na tabela 4.1. Ela é a única propriedade do material cuja representação matemática deve ser escolhida pelo analista (GOLLA e HUGHES, 1985; BARBOSA, 2000). Os autores do método GHM empregam, em seus trabalhos, uma função proposta por Biot (1955), justificando que ela é adotada por estar de acordo com a teoria clássica de funções de transferência racionais no domínio de Laplace (utilizada no método em questão), além de apresentar uma equivalência a sistemas de equações diferenciais lineares de valor inestimável.

Tabela 4.1 - Funções dissipação

Função	Proponente (ano) (Fonte: GOLLA e HUGHES, 1985)
$\bar{h}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k s}{s + b_k}$	Biot (1955)
$\bar{h}(s) = \frac{G_1 s^\alpha - G_0 b s^\beta}{1 + b s^\beta}$ $0 < \alpha < 1 \text{ e } 0 < \beta < 1$ (aqui adaptada para cisalhamento)	Bagley e Torvik (1981)
$h(s) = as \int_0^\infty \frac{\gamma(p)}{s + p} dp$ $\gamma(p) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq p \leq \beta \\ 0, & p \notin [\alpha; \beta] \end{cases}$	Buhariwala (1982)

Da tabela 4.1, nota-se que, ao se usar a função dissipação proposta por Bagley e Torvik na equação (4.1.14), obtém-se o modelo de derivadas fracionárias, com cinco parâmetros, no domínio de Laplace.

Como se pode observar na tabela 4.1, a função dissipação de Biot, no domínio de Laplace, é representada pela série

$$\bar{h}(s) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k s}{s + b_k}. \quad (4.1.15)$$

A série de Biot é utilizada na literatura apenas com os dois primeiros termos, sendo $b_2 > b_1 > 0$. Esta série truncada é denominada por par de pólos de dissipação (GOLLA E HUGHES, 1985) e é descrita por

$$\bar{h}(s) = \frac{\hat{\alpha} s^2 + \hat{\gamma} s}{s^2 + \hat{\beta} s + \hat{\delta}}, \quad (4.1.16)$$

onde $\hat{\alpha} = a_1 + a_2$, $\hat{\gamma} = a_1 b_2 + a_2 b_1$, $\hat{\beta} = b_1 + b_2$ e $\hat{\delta} = b_1 b_2$, sendo que $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}, \hat{\delta}) > 0$.

Assim, a expressão para o módulo complexo de cisalhamento no domínio de Laplace torna-se

$$\bar{G}(s) = G_0 + \bar{h}(s) = G_0 + \frac{\hat{\alpha}s^2 + \hat{\gamma}s}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}}. \quad (4.1.17)$$

Segundo Golla e Hughes (1985), para a aplicação da expressão (4.1.17) à modelagem de sistemas vibrantes, é necessário estabelecer a restrição de que $\hat{\gamma} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$. Assim a equação (4.1.17) passa a ser

$$\bar{G}(s) = G_0 + \bar{h}(s) = G_0 + \frac{\hat{\alpha}s^2 + \hat{\beta}s}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}}. \quad (4.1.18)$$

Já Friswell et al. (1997) entendem que essa restrição não é necessária e, além disso, propõem, de forma alternativa, que

$$\bar{G}(s) = G_0 + \bar{h}(s) = G_\infty + \frac{\hat{\theta}s + \hat{\mu}}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}}, \quad (4.1.19)$$

onde $G_\infty = G_0 + \hat{\alpha}$, $\hat{\theta} = \hat{\gamma} - \hat{\alpha}\hat{\beta}$ e $\hat{\mu} = -\hat{\alpha}\hat{\delta}$.

A substituição de G_∞ , $\hat{\theta}$ e $\hat{\mu}$, como expressos acima, em (4.1.19) resulta na expressão (4.1.17). Se a restrição $\hat{\gamma} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$ é considerada, obtém-se a expressão (4.1.18).

Os desenvolvimentos de Friswell et al. (1997) são apresentados no Apêndice I.

4.2 Conversão do Domínio de Laplace para o Domínio da Frequência

Medições experimentais não fornecem curvas no domínio de Laplace, e sim no domínio da frequência. Sendo assim, para que as expressões anteriormente apresentadas possam ser ajustadas a essas curvas experimentais, é necessário que elas sejam expressas no domínio da frequência.

A expressão (4.1.9), repetida abaixo por conveniência, define a transformada de Laplace unilateral de uma função $f(t)$, de modo que (PAPOULIS, 1962)

$$\bar{F}(s) = L \{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{y \rightarrow \infty} \left[\int_0^y f(t)e^{-st} dt \right], \quad (4.1.9)$$

sendo que $f(t)$ é uma função real ou complexa, definida para todo $t \geq 0$, e a variável s é um número complexo da forma $s = p + iv$, de modo que, para cada $p > 0$, ocorre a convergência da integral imprópria acima. Ou seja, se a integral existe para um dado valor $s_0 = p_0 + iv_0$ de s , então ela existe para qualquer valor de s tal que $\text{Re}(s) > p_0$. Para toda função $f(t)$, uma constante χ pode ser associada, tal que $\bar{F}(s)$ convirja para $\text{Re}(s) > \chi$ e não convirja para $\text{Re}(s) < \chi$ (para $\text{Re}(s) = \chi$, conclusões gerais não podem ser tiradas).

Se a região de convergência de $\bar{F}(s)$ no plano complexo contiver o eixo $\text{Im}(s)$ em seu interior, i.e., se $\chi < 0$, a transformada de Fourier dada por (3.1.5) será um caso especial da transformada de Laplace dada por (4.1.9), em que $s = i\Omega$. Nesses casos, pode-se considerar, no domínio da frequência, expressões de $\bar{G}(s)$ em que

$$s = i\Omega. \quad (4.2.1)$$

Assim sendo, no domínio da frequência, as equações que representam o modelo do módulo dinâmico de cisalhamento para a abordagem GHM padrão (conforme Golla e Hughes, 1985) e para a abordagem alternativa (conforme Friswell et al., 1997) são, respectivamente,

$$\bar{G}(\Omega) = G_0 + \frac{\hat{\alpha}(-\Omega^2 + i\hat{\beta}\Omega)}{-\Omega^2 + i\hat{\beta}\Omega + \hat{\delta}} \quad (4.2.2)$$

e

$$\bar{G}(\Omega) = G_{\infty} + \frac{i\hat{\theta}\Omega + \hat{\mu}}{-\Omega^2 + i\hat{\beta}\Omega + \hat{\delta}}. \quad (4.2.3)$$

4.3 Análise dos Parâmetros do Modelo GHM Padrão

Similarmente ao que foi feito na seção 3.2 para o modelo de DF, é feito aqui, para o modelo GHM padrão ($\hat{\gamma} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$), um estudo do comportamento do módulo real de cisalhamento e do fator de perda correspondente, face aos parâmetros do modelo. Essa análise busca observar, graficamente, a influência dos parâmetros, utilizando um conjunto de valores base e, de forma isolada, modificando esses valores. Uma análise semelhante é apresentada no trabalho de Barbosa (2000) e os resultados aqui obtidos condizem com os lá apresentados.

Utilizando a equação (4.2.2) e os valores base, inspirados na literatura, apresentados na tabela 4.2, são obtidas as curvas exibidas nas figuras 4.2 e 4.3.

Tabela 4.2 - Valores base do modelo GHM padrão

Parâmetros	Valores
G_0	$2 \cdot 10^6$ Pa
$\hat{\alpha}$	$5 \cdot 10^6$ Pa
$\hat{\beta}$	$6 \cdot 10^3$ s ⁻¹
$\hat{\delta}$	10^6 s ⁻²

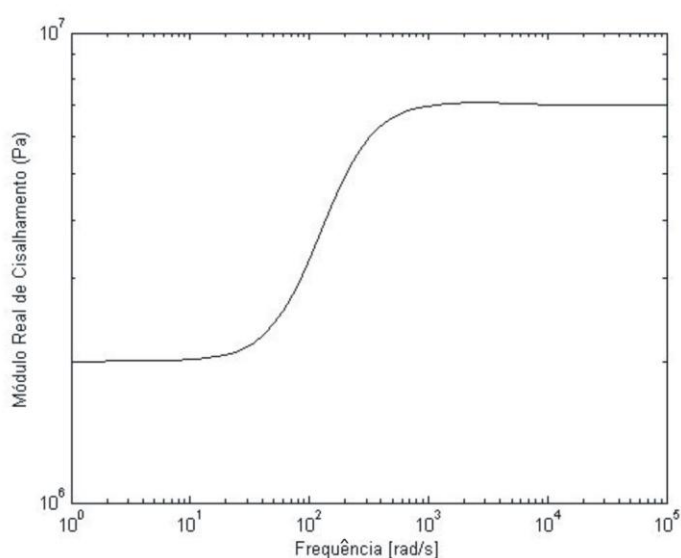


Figura 4.2 - Módulo real de cisalhamento via GHM padrão

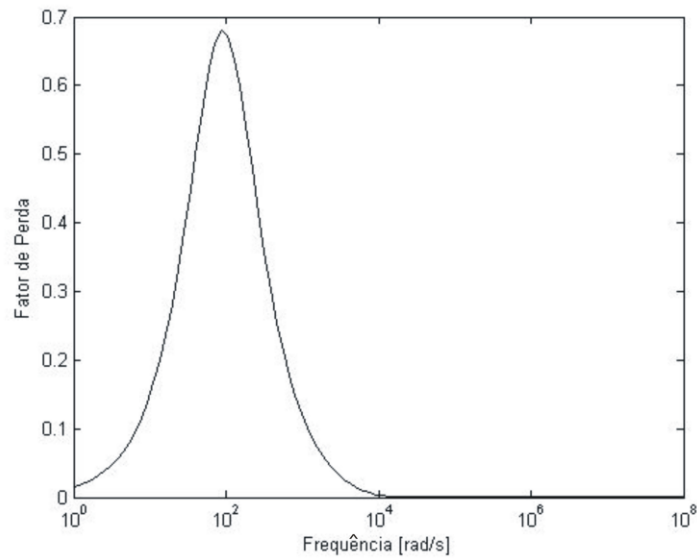


Figura 4.3 - Fator de perda via GHM padrão

4.3.1 Influência do Parâmetro G_0

Mantendo todos os demais parâmetros do modelo GHM padrão fixos, de acordo com os valores base da tabela 4.2 e variando apenas o valor de G_0 , entre $G_{01} = 0,5G_0$ e $G_{02} = 2G_0$, obtem-se as curvas das figuras 4.4 e 4.5. Essas curvas mostram que quanto maior o valor de G_0 , maiores serão os valores do módulo dinâmico do material. Isso pode ser visto na diferença entre as curvas correspondentes obtidas, que são translações verticais da curva base, de acordo com a variação do valor de G_0 .

Com relação ao fator de perda, observa-se uma redução geral com o aumento do parâmetro analisado, além de um ligeiro deslocamento do pico. Isso mostra que, em geral, quanto maior o valor de G_0 , mais elevadas são as características elásticas do modelo e menos pronunciadas as características viscosas.

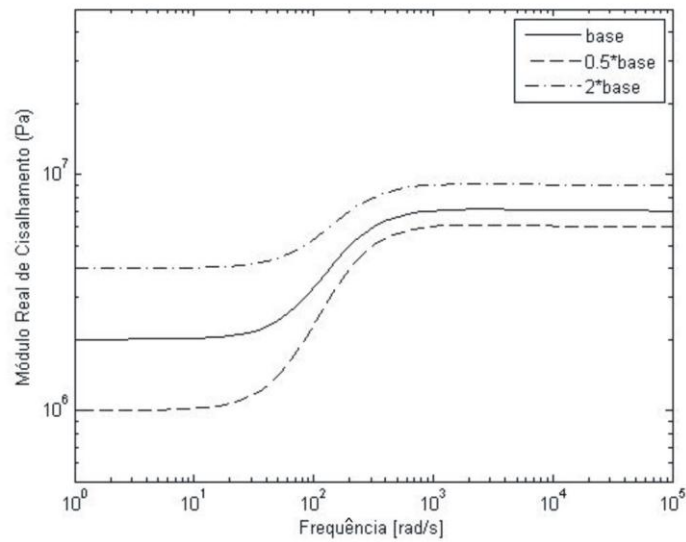


Figura 4.4 - Variação do módulo real de cisalhamento com G_0

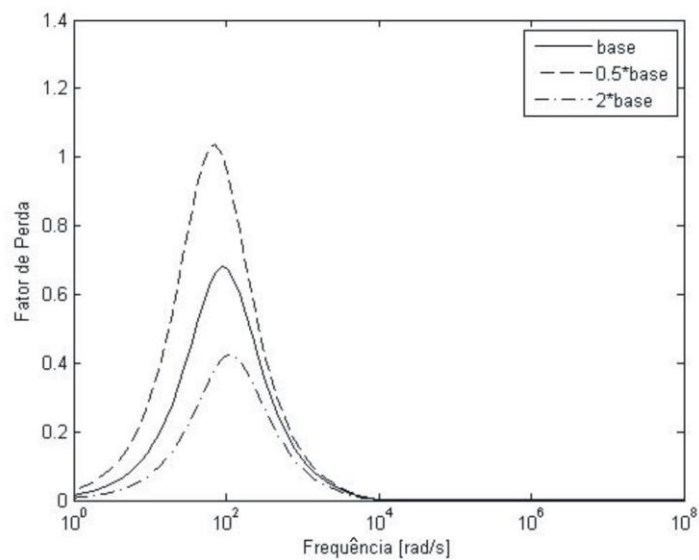


Figura 4.5 - Variação do fator de perda com G_0

4.3.2 Influência do Parâmetro $\hat{\alpha}$

O mesmo procedimento aplicado ao estudo do parâmetro G_0 foi seguido para o estudo do parâmetro $\hat{\alpha}$, onde todos os demais parâmetros foram mantidos fixos (valores base) e $\hat{\alpha}$ variou entre $\hat{\alpha}_1 = 0,5\hat{\alpha}$ e $\hat{\alpha}_2 = 2\hat{\alpha}$.

As curvas das figuras 4.6 e 4.7 mostram que $\hat{\alpha}$ é determinante para os valores do módulo dinâmico a partir da região de transição, em direção às frequências mais elevadas

(valor assintótico superior de G_R). Além disso, quando o valor de $\hat{\alpha}$ tende a 0 (zero), o valor de G_R (e também o de \bar{G}) tende a G_0 , o que representa um material puramente elástico.

Quanto ao fator de perda, mostra-se que para valores maiores de $\hat{\alpha}$, maiores são os valores do fator de perda. Em outras palavras, o parâmetro $\hat{\alpha}$ mostra-se diretamente relacionado ao amortecimento do modelo. Observa-se, também, um ligeiro deslocamento do pico para a esquerda, com o aumento de $\hat{\alpha}$.

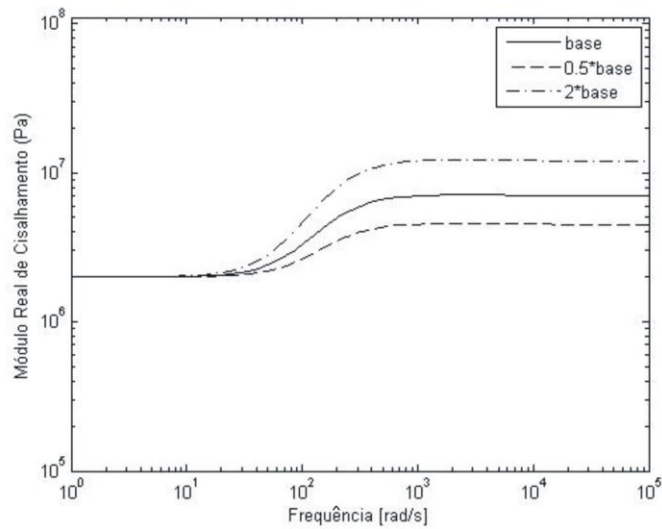


Figura 4.6 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\alpha}$

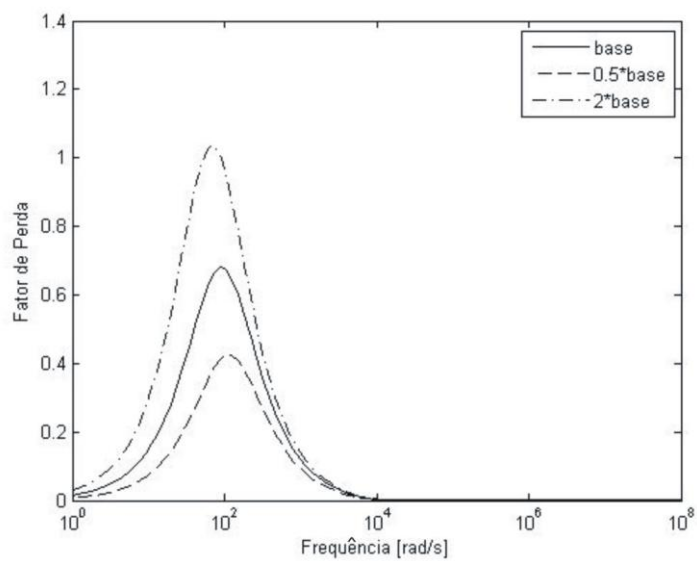


Figura 4.7 - Variação do fator de perda com $\hat{\alpha}$

4.3.3 Influência do Parâmetro $\hat{\beta}$

Com os valores base da tabela 4.2 e variando os valores do parâmetro $\hat{\beta}$, entre $\hat{\beta}_1 = 0,5\hat{\beta}$ e $\hat{\beta}_2 = 2\hat{\beta}$, são obtidas as curvas apresentadas nas figuras 4.8 e 4.9. Tais curvas mostram que $\hat{\beta}$ determina a localização da frequência de transição. Especificamente, o aumento de $\hat{\beta}$ faz com que a frequência de transição diminua. Observa-se também uma redução, ainda que discreta, na altura do pico do fator de perda.

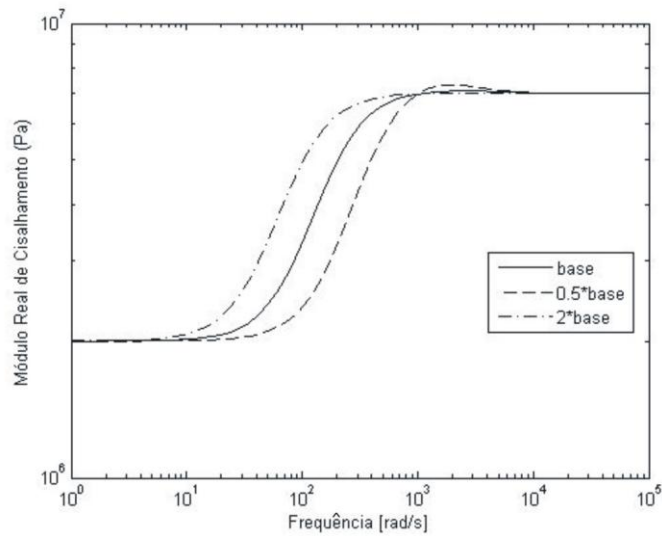


Figura 4.8 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\beta}$

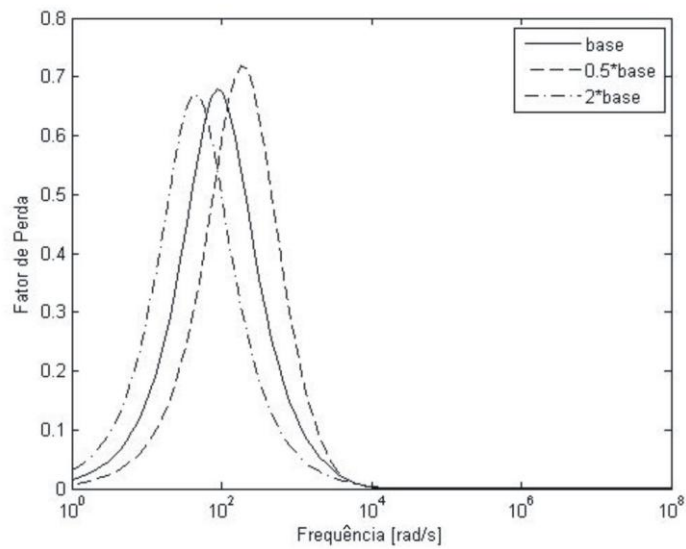


Figura 4.9 - Variação do fator de perda com $\hat{\beta}$

4.3.4 Influência do Parâmetro $\hat{\delta}$

Por fim, fixando todos os outros parâmetros e variando $\hat{\delta}$ entre $\hat{\delta}_1 = 0,5\hat{\delta}$ e $\hat{\delta}_2 = 2\hat{\delta}$, são obtidos os gráficos das figuras 4.10 e 4.11, que permitem uma análise qualitativa do parâmetro.

Observa-se que $\hat{\delta}$ possui características semelhantes ao parâmetro $\hat{\beta}$, alterando a localização da frequência de transição, porém, de forma inversa, uma vez que a diminuição de $\hat{\delta}$ faz com que a frequência de transição também diminua. Além disso, ele reduz discretamente a altura do pico do fator de perda.

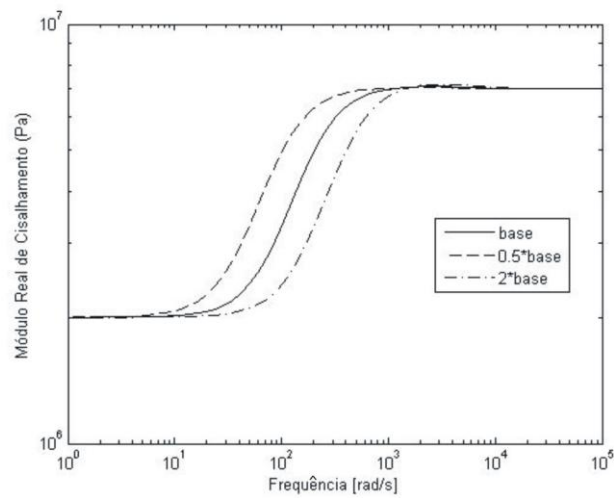


Figura 4.10 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\delta}$

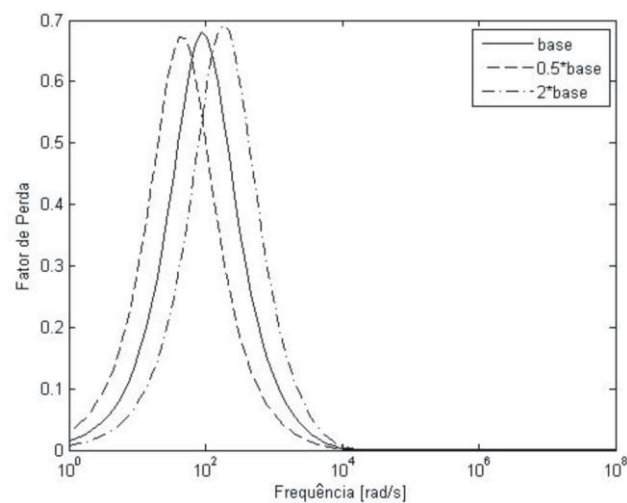


Figura 4.11 - Variação do fator de perda com $\hat{\delta}$

4.3.5 Sobre a semelhança da influência dos parâmetros $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$

Embora os parâmetros $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$ apresentem praticamente as mesmas características, só que de forma inversa, não existe uma relação através da qual eles possam ser associados, de modo a gerar uma única variável e reduzir, assim, o número de parâmetros no modelo.

Os valores adotados para esses parâmetros podem resultar em perturbações nas curvas de módulo dinâmico, como pode ser observado nas figuras 4.8 e 4.10, logo no início da região vítrea. Essas perturbações não são próprias de curvas características de módulo dinâmico de materiais viscoelásticos (BARBOSA, 2000).

4.4 Análise dos Parâmetros do Modelo GHM Alternativo

Reserva-se este item à análise dos parâmetros do modelo GHM alternativo (proposto por Friswell et Al, 1997), sendo esta feita de forma semelhante como foram feitas as análises do modelo GHM padrão e do modelo de DF, nos itens 4.3 e 3.2, respectivamente.

Utilizando a equação (4.2.3), repetida a seguir por conveniência, e os valores base, inspirados na literatura, apresentados na tabela 4.3, são obtidas as curvas exibidas nas figuras 4.12 e 4.13.

$$\bar{G}(\Omega) = G_{\infty} + \frac{i\hat{\theta}\Omega + \hat{\mu}}{-\Omega^2 + i\hat{\beta}\Omega + \hat{\delta}}. \quad (4.2.3)$$

Tabela 4.3 - Valores base do modelo GHM alternativo

Parâmetros	Valores
G_{∞}	7.10^6 Pa
$\hat{\theta}$	5.10^9 Pa.s^{-1}
$\hat{\beta}$	6.10^5 s^{-1}
$\hat{\mu}$	$-4.10^{14} \text{ Pa.s}^{-2}$
$\hat{\delta}$	2.10^8 s^{-2}

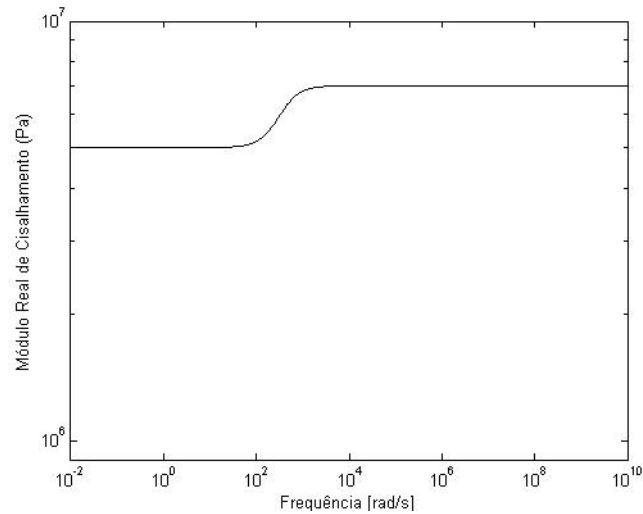


Figura 4.12 - Módulo real de cisalhamento via GHM alternativo

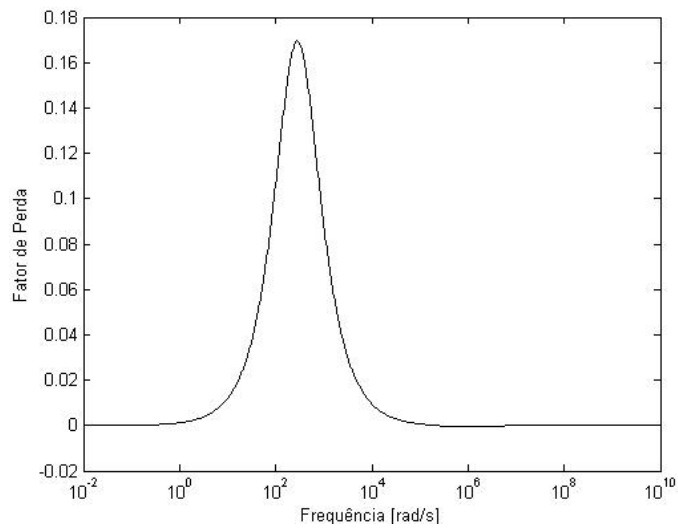


Figura 4.13 - Fator de perda via GHM alternativo

4.4.1 Influência do Parâmetro G_{∞}

Mantendo todos os demais parâmetros do modelo GHM alternativo fixos, de acordo com os valores base da tabela 4.3, e variando apenas o valor de G_{∞} , sendo que $G_{\infty 1} = 7 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ (base, curva 1), $G_{\infty 2} = 5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ (curva 2) e $G_{\infty 3} = 9 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ (curva 3), são obtidas as curvas apresentadas nas figuras 4.14 e 4.15.

De forma semelhante ao parâmetro G_0 na análise do modelo GHM padrão, as curvas obtidas mostram que quanto maior o valor de G_{∞} , maiores serão os valores para o módulo

dinâmico. Isso pode ser visto na diferença entre as curvas correspondentes obtidas, que são translações verticais da curva base, de acordo com a variação do valor de G_∞ .

Com relação ao fator de perda, ainda da mesma forma com o que ocorre com relação ao parâmetro G_0 no modelo GHM padrão, observa-se uma redução com o aumento do parâmetro analisado, além de um ligeiro deslocamento do pico. Isso mostra que, em geral, quanto maior o valor de G_∞ , mais elevadas são as características elásticas do modelo e menos pronunciadas as características viscosas.

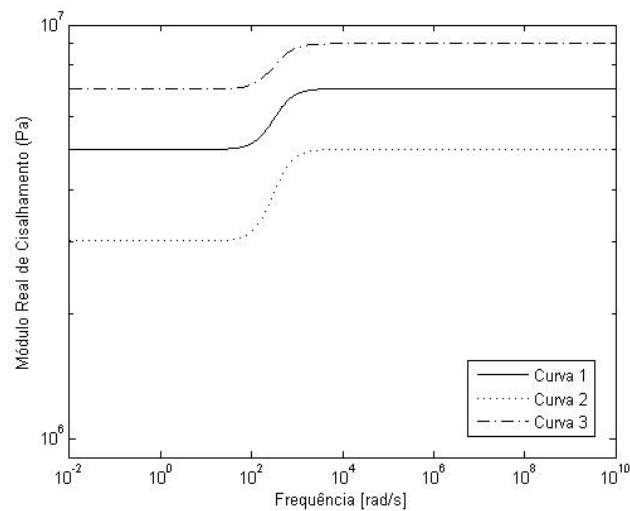


Figura 4.14 - Variação do módulo de cisalhamento com G_∞

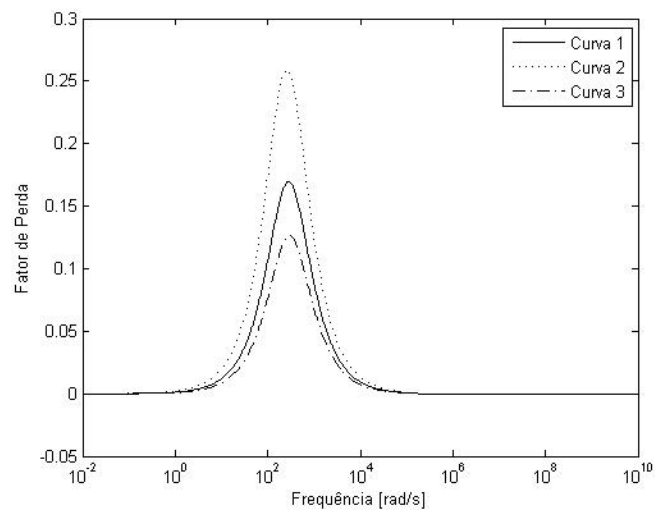


Figura 4.15 - Variação do fator de perda com G_∞

4.4.2 Influência do Parâmetro $\hat{\theta}$

Sendo todos os demais valores de parâmetros fixados de acordo com a tabela 4.3 e fazendo com que $\hat{\theta}$ assumia os valores $\hat{\theta}_1 = 5.10^9 \text{ Pa.s}^{-1}$ (curva 1), $\hat{\theta}_2 = 1.10^9 \text{ Pa.s}^{-1}$ (curva 2), $\hat{\theta}_3 = 10.10^9 \text{ Pa.s}^{-1}$ (curva 3), $\hat{\theta}_4 = 5.10^{11} \text{ Pa.s}^{-1}$ (curva 4) e $\hat{\theta}_5 = -5.10^{11} \text{ Pa.s}^{-1}$ são gerados os gráficos das figuras 4.16 e 4.17.

Este parâmetro se mostra pouco sensível a alterações e sua variação pode até provocar deformidades nas curvas de módulo real de cisalhamento, acompanhadas do aparecimento de picos extras no fator de perda, sendo que estes podem, inclusive, aparecer invertidos.

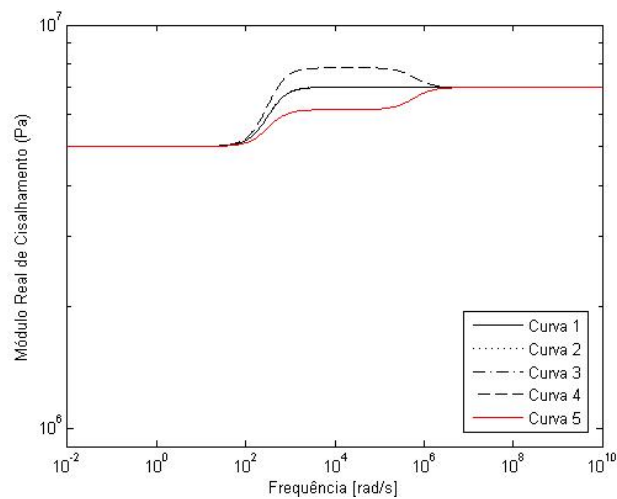


Figura 4.16 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\theta}$

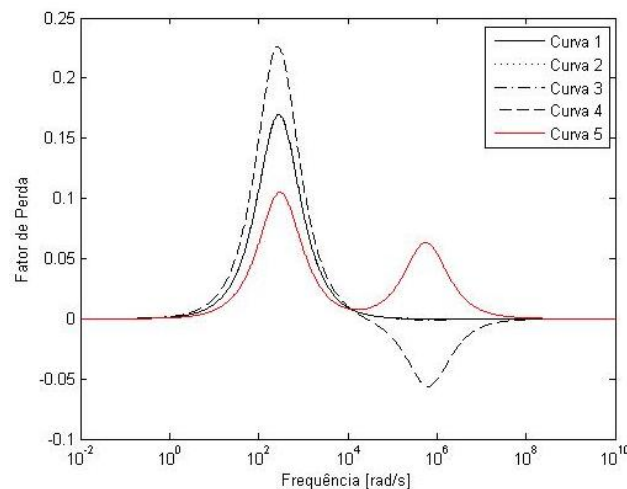


Figura 4.17 - Variação do fator de perda com $\hat{\theta}$

4.4.3 Influência do Parâmetro $\hat{\mu}$

Considera-se, aqui, $\hat{\mu}_1 = -4.10^{14} \text{ Pa.s}^{-2}$ (curva 1), $\hat{\mu}_2 = -6.10^{14} \text{ Pa.s}^{-2}$ (curva 2) e $\hat{\mu}_3 = -2.10^{14} \text{ Pa.s}^{-2}$ (curva 3). Para esses valores, são gerados os gráficos de módulo real de cisalhamento e fator de perda nas figuras 4.18 e 4.19, respectivamente.

O parâmetro $\hat{\mu}$ se mostra determinante no tocante aos valores do módulo dinâmico a partir da região de transição, em direção às frequências mais baixas. Além disso, quando o valor de $\hat{\mu}$ tende a 0 (zero), o valor de G_R (e também de \bar{G}) tende a G_∞ , o que representa um material puramente elástico.

No tocante ao fator de perda, mostra-se que, à medida que se reduz $\hat{\mu}$, maiores são os valores dessa propriedade. Em outras palavras, o parâmetro $\hat{\mu}$ mostra-se inversamente relacionado com o amortecimento do material. Além disso, observa-se um ligeiro deslocamento do pico para a esquerda com a redução de $\hat{\mu}$.

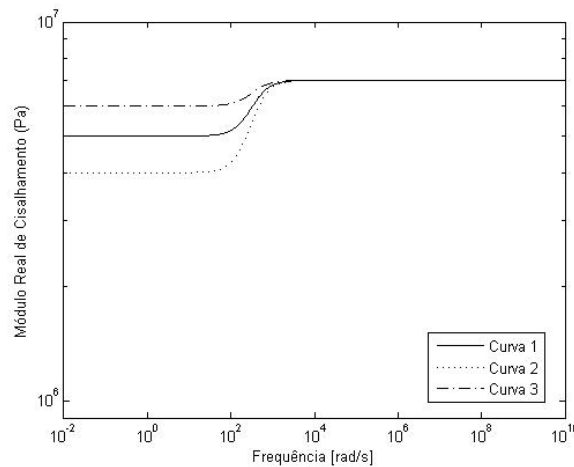


Figura 4.18 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\mu}$

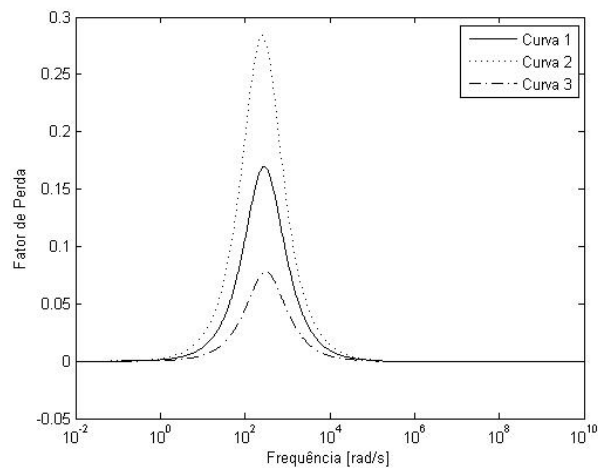


Figura 4.19 - Variação do fator de perda com $\hat{\mu}$

4.4.4 Influência do Parâmetro $\hat{\beta}$

Com os valores base da tabela 4.3 e variando apenas os valores do parâmetro $\hat{\beta}$, obtêm-se as curvas ilustradas nas figuras 4.20 e 4.21. Essas curvas, para $\hat{\beta}_1 = \hat{\beta}$ (curva 1), $\hat{\beta}_2 = 0,5\hat{\beta}$ (curva 2) e $\hat{\beta}_3 = 2\hat{\beta}$ (curva 3), mostram que, no modelo GHM alternativo, o parâmetro $\hat{\beta}$ tem influência semelhante à do $\hat{\beta}$ no GHM padrão, determinando a localização da frequência de transição. Particularmente, o seu aumento faz com que a frequência de transição diminua. Não se observa, contudo, variação na altura do pico do fator de perda.

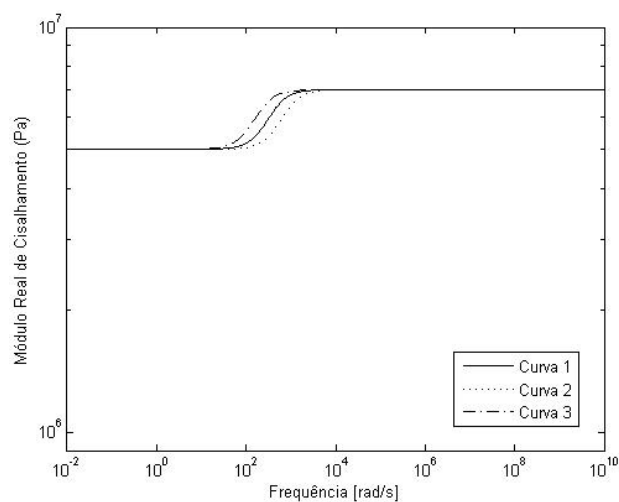


Figura 4.20 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\beta}$

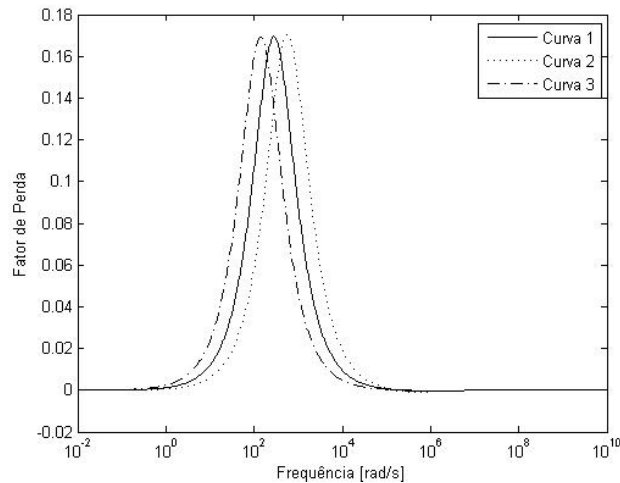


Figura 4.21 - Variação do fator de perda com $\hat{\beta}$

4.4.5 Influência do Parâmetro $\hat{\delta}$

Variando apenas os valores do parâmetro $\hat{\delta}$, de modo que $\hat{\delta}_1 = \hat{\delta}$ (curva 1), $\hat{\delta}_2 = 0,5\hat{\delta}$ (curva 2) e $\hat{\delta}_3 = 2\hat{\delta}$ (curva 3), obtêm-se as curvas dinâmicas ilustradas nas figuras 4.22 e 4.23. Percebe-se que, para o GHM alternativo, este parâmetro não apresenta influência inversa à do parâmetro $\hat{\beta}$, como no modelo GHM padrão. Sua influência, quanto ao módulo dinâmico, é semelhante à do parâmetro $\hat{\mu}$, determinando os valores a partir da região de transição, em direção às baixas frequências.

Com relação ao fator de perda, sua influência também é semelhante à de $\hat{\mu}$, ou seja, há uma relação inversa. Porém, o deslocamento do pico é mais significativo.

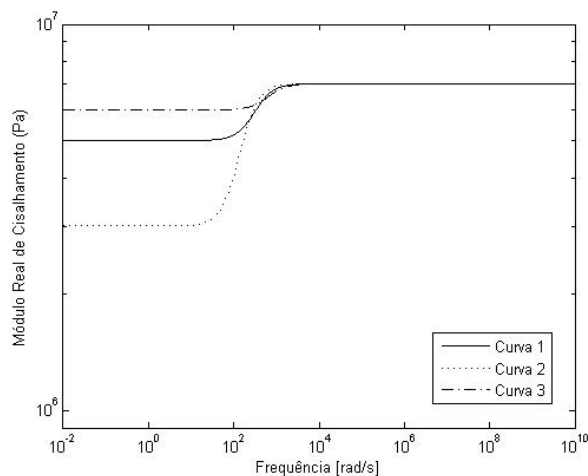


Figura 4.22 - Variação do módulo real de cisalhamento com $\hat{\delta}$

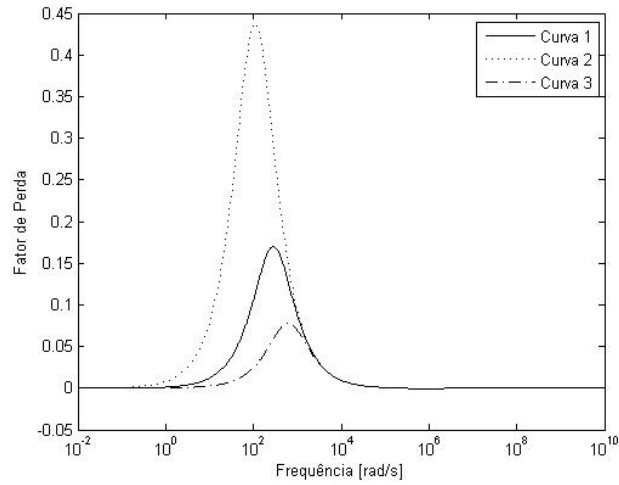


Figura 4.23 - Variação do fator de perda com $\hat{\delta}$

4.5 Região de Busca no Modelo via GHM Padrão

Como afirmado na seção 3.2, é interessante que se tenha uma ideia do comportamento dos parâmetros de cada modelo, para facilitar o ajuste entre curvas experimentais e modelos matemáticos. Pode-se, inclusive, estabelecer, face a esse estudo, um espaço de busca de valores.

A equação (4.2.2), que representa o módulo complexo de cisalhamento, no domínio da frequência, para o modelo GHM padrão, tem sua parte real dada por

$$G_R = G_0 + \frac{\hat{\alpha}\Omega^2(\Omega^2 - \hat{\delta} + \hat{\beta}^2)}{(\hat{\delta} - \Omega^2)^2 + \hat{\beta}^2\Omega^2}. \quad (4.5.1)$$

Quando $\Omega \rightarrow 0$, observa-se que G_R tende para G_0 , ou seja

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} G_R = G_R(0) = G_0. \quad (4.5.2)$$

Tomando-se agora o limite de G_R quando $\Omega \rightarrow \infty$, chega-se a

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} G_R = G_0 + \hat{\alpha}. \quad (4.5.3)$$

Isso pode ser visualizado na análise de influência dos parâmetros do modelo GHM padrão, que mostra claramente que G_0 é o módulo real para frequências mais baixas e que $\hat{\alpha}$ é a diferença entre os valores assintóticos superior e inferior do módulo real.

Assim, com uma faixa de dados experimentais que varia entre $\Omega_{\text{máx}}$ e $\Omega_{\text{mín}}$, pode-se dizer que as regiões de busca para G_R e $\hat{\alpha}$ são

$$G_0 \leq G_R(\Omega_{\text{mín}}) \quad (4.5.4)$$

e

$$\hat{\alpha} \geq G_R(\Omega_{\text{máx}}) - G_0. \quad (4.5.5)$$

A afirmação de que $G_R > 0$ e $\eta > 0$, para todo Ω , fornece uma restrição para a equação (4.5.1), que é expressa por

$$G_0 + \frac{\hat{\alpha}\Omega^2(\Omega^2 - \hat{\delta} + \hat{\beta}^2)}{(\hat{\delta} - \Omega^2)^2 + \hat{\beta}^2\Omega^2} > 0, \quad \forall \Omega. \quad (4.5.6)$$

Como o termo G_0 e o denominador do segundo termo da expressão acima são sempre positivos, o numerador desse segundo termo tem que ser maior que zero, para satisfazer $G_R > 0$. Sendo assim, decorre que

$$\hat{\alpha}\Omega^2(\Omega^2 - \hat{\delta} + \hat{\beta}^2) > 0, \quad \forall \Omega. \quad (4.5.7)$$

Do contexto da equação (4.1.16), sabe-se que $\hat{\alpha} > 0$. Tem-se, então, que o produto $\hat{\alpha}\Omega^2$ é positivo. Assim, o termo entre parêntesis também tem que ser positivo. Como, ainda do contexto de (4.1.16), $\hat{\delta} > 0$, resulta a inequação

$$\hat{\delta} < (\Omega^2 + \hat{\beta}^2), \quad \forall \Omega. \quad (4.5.8)$$

Uma vez que o intervalo de dados em frequência está compreendido entre $\Omega_{\text{mín}}$ e $\Omega_{\text{máx}}$ e $\Omega_{\text{máx}} > \Omega_{\text{mín}}$, a equação (4.5.8) fornece

$$\hat{\beta}^2 > \hat{\delta} - \Omega_{\min}^2. \quad (4.5.9)$$

Como, também do contexto de (4.1.16), $\hat{\beta}$ é real e maior do que zero, resulta que

$$\hat{\beta} > \sqrt{\hat{\delta} - \Omega_{\min}^2}. \quad (4.5.10)$$

e

$$\hat{\delta} \geq \Omega_{\min}^2. \quad (4.5.11)$$

A expressão para o fator de perda é

$$\eta = \frac{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\delta}\Omega}{(\hat{\delta} - \Omega^2)^2 + \hat{\beta}^2\Omega^2} \cdot \frac{1}{G_R} \quad (4.5.12)$$

e a inequação $\eta > 0$ é, face ao já exposto, sempre satisfeita.

4.6 Região de Busca no Modelo via GHM Alternativo

A equação (4.2.3), que representa o módulo complexo de cisalhamento, no domínio da frequência, para o modelo GHM alternativo, tem sua parte real dada por

$$G_R = G_\infty + \frac{(\hat{\theta}\hat{\beta} - \hat{\mu})\Omega^2 + \hat{\mu}\hat{\delta}}{(\hat{\delta} - \Omega^2)^2 + \hat{\beta}^2\Omega^2}. \quad (4.6.1)$$

Quando $\Omega \rightarrow 0$, observa-se que G_R tende para $G_\infty + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\delta}}$, ou seja

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} G_R = G_R(0) = G_\infty + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\delta}}. \quad (4.6.2)$$

Tomando-se agora o limite de G_R quando $\Omega \rightarrow \infty$, chega-se à

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} G_R = G_\infty. \quad (4.6.3)$$

Como $\hat{\delta} > 0$ e, obviamente, a assíntota inferior de G_R é menor do que a superior, conclui-se que

$$\hat{\mu} < 0. \quad (4.6.4)$$

Assim, com uma faixa de dados experimentais que varia entre $\Omega_{\text{máx}}$ e $\Omega_{\text{mín}}$, pode-se dizer que as regiões de busca para G_∞ e $\hat{\mu}$ são

$$G_\infty \geq G_R(\Omega_{\text{máx}}) \quad (4.6.5)$$

e

$$\hat{\mu} \leq \hat{\delta}(G_R(\Omega_{\text{mín}}) - G_\infty), \quad (4.6.6)$$

pois

$$G_\infty + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\delta}} \leq G_R(\Omega_{\text{mín}}). \quad (4.6.7)$$

A afirmação de que $G_R > 0$ e $\eta > 0$, para todo Ω , fornece uma restrição para a equação (4.6.1) que é expressa por

$$G_\infty + \frac{(\hat{\theta}\hat{\beta} - \hat{\mu})\Omega^2 + \hat{\mu}\hat{\delta}}{(\hat{\delta} - \Omega^2)^2 + \hat{\beta}^2\Omega^2} > 0, \quad \forall \Omega. \quad (4.6.8)$$

Tanto G_∞ , quanto o denominador do segundo termo do lado esquerdo da desigualdade acima, são sempre positivos. Assim, o numerador desse segundo termo tem que ser maior do que zero. Sendo assim, chega-se à

$$(\hat{\theta}\hat{\beta} - \hat{\mu})\Omega^2 + \hat{\mu}\hat{\delta} > 0, \quad \forall \Omega. \quad (4.6.9)$$

Sabe-se que Ω^2 é positivo e que $\hat{\mu}\hat{\delta}$ é negativo, pois $\hat{\delta} > 0$ e $\hat{\mu} < 0$. Logo, o termo entre parêntesis acima deve ser positivo, o que implica

$$\hat{\theta}\hat{\beta} > \hat{\mu}. \quad (4.6.10)$$

Além disso, sabe-se que $\hat{\beta} > 0$. Rearranjando, então, e a expressão (4.6.9) para

$$\hat{\theta}\hat{\beta}\Omega^2 > \hat{\mu}(\Omega^2 - \hat{\delta}), \quad (4.6.11)$$

decorre que, para

$$\begin{aligned} \Omega^2 > \hat{\delta} &\rightarrow \hat{\mu}(\Omega^2 - \hat{\delta}) < 0 \rightarrow \hat{\theta} < 0 \\ \Omega^2 < \hat{\delta} &\rightarrow \hat{\mu}(\Omega^2 - \hat{\delta}) > 0 \rightarrow \hat{\theta} > 0 \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

A expressão para o fator de perda é

$$\eta = \frac{\Omega(\hat{\theta}\hat{\delta} - \hat{\theta}\Omega^2 - \hat{\beta}\hat{\mu})}{(\hat{\delta} - \Omega^2)^2 + \hat{\beta}^2\Omega^2} \cdot \frac{1}{G_R} \quad (4.6.13)$$

Assim, para que a inequação $\eta > 0$ seja satisfeita, partindo-se de que $G_R > 0$, tem-se que $\hat{\theta}\hat{\delta} - \hat{\theta}\Omega^2 - \hat{\beta}\hat{\mu} > 0$, ou

$$\hat{\theta} > \frac{\hat{\beta}\hat{\mu}}{(\hat{\delta} - \Omega^2)}. \quad (4.6.14)$$

Percebe-se que o modelo alternativo apresenta regiões de busca mais amplas, quando comparadas com as do método GHM padrão. Isso torna sua utilização em procedimentos de minimização, a priori, mais complexa.

4.7 Termos Adicionais em Modelos GHM

Uma análise preliminar do exposto anteriormente, neste capítulo e no anterior, permite argumentar que os modelos GHM se mostram menos adequados do que o modelo de DF à descrição do comportamento viscoelástico, em particular no tocante à inclinação da região de transição. Pode-se, inclusive, propor a tabela 4.4, que relaciona características relevantes nas curvas de módulo real de cisalhamento e fator de perda com os parâmetros dos modelos de DF e GHM que afetam, de forma marcante, essas características. Nota-se, de forma clara, que o modelo de DF é mais direto em sua função de representante do comportamento viscoelástico típico.

Tabela 4.4 - Características relevantes e parâmetros de modelos viscoelásticos

Característica	DF	GHM Padrão	GHM Alternativo
assíntota inferior de G_R	G_0	G_0	$G_\infty, \hat{\mu}, \hat{\delta}$
assíntota superior de G_R	G_1	$G_0, \hat{\alpha}$	G_∞
inclinação da região de transição	β	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}, \hat{\delta}, \hat{\theta}$
localização da frequência de transição	b, β	$\hat{\beta}, \hat{\delta}$	$\hat{\beta}, \hat{\delta}$

Uma forma de se reduzir essa menor adequação é expandir o componente $\bar{h}(s)$ dos modelos GHM, adicionando os chamados pares de pólo de dissipação (GOLLA e HUGHES, 1985). Em outras palavras, acrescentando termos à função dissipação. Essa adição de termos transforma $\bar{h}(s)$ num somatório e influencia as curvas de propriedades dinâmicas pelo fato de que cada novo termo gera novas curvas com o formato geral das anteriores, porém, face aos novos parâmetros ($\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$) ou ($\hat{\theta}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$) com características particulares. Essas novas curvas se somam às existentes e alteram o resultado final.

A expansão de $\bar{h}(s)$, num modelo GHM padrão, no domínio de Laplace, pode ser representada por

$$\bar{G}(s) = G_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\hat{\alpha}_k s^2 + \hat{\beta}_k s}{s^2 + \hat{\beta}_k s + \hat{\delta}_k} \quad (4.7.1)$$

Abaixo, nas figuras 4.24 e 4.25, são mostradas as curvas resultantes do módulo real de cisalhamento e do fator de perda com um, dois, três e quatro termos num modelo GHM padrão, onde se pode observar no caso do módulo real, os patamares intermediários gerados pelos novos termos e as diferenças quanto às inclinações das novas curvas. Quanto ao fator de perda, pode-se observar o aparecimento de novos picos, correspondentes às mudanças de inclinação das curvas de módulo real de cisalhamento. Esses patamares e picos podem ser manipulados de modo a serem suavizados e gerar curvas muito próximas às curvas experimentais.

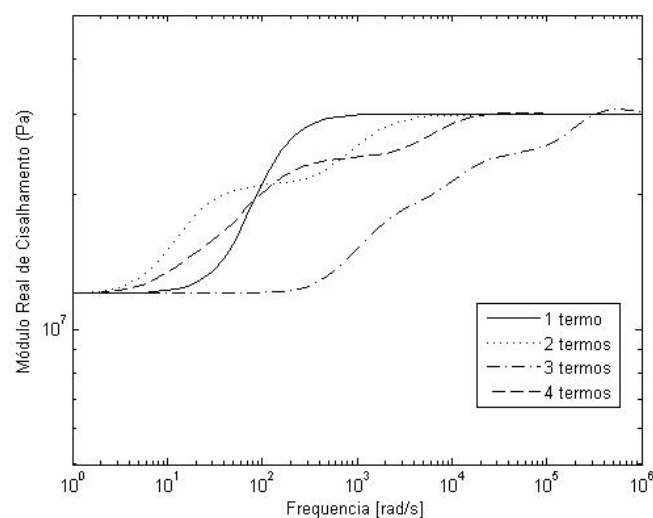


Figura 4.24 - Influência do número de termos adicionais no módulo real de cisalhamento

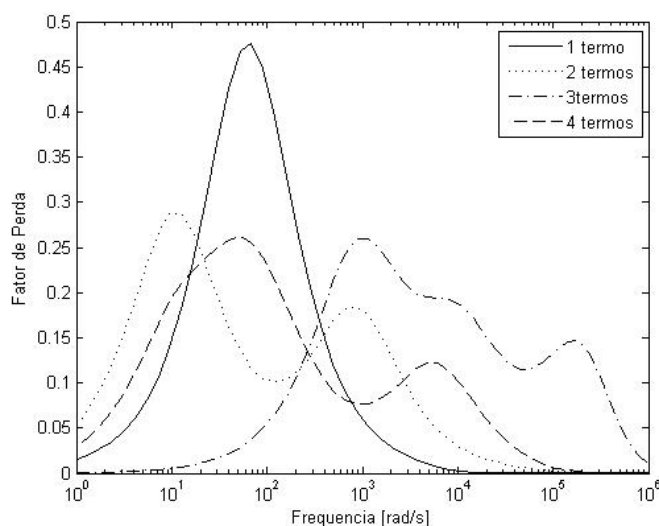


Figura 4.25 - Influência do número de termos adicionais no fator de perda

Golla e Hughes (1985) afirmam em que uma função dissipação $\bar{h}(s)$ com quatro termos é relativamente simples. Contudo, haja vista a quantidade de termos e levando-se em conta que cada termo do somatório tem três parâmetros, com ordens de grandeza bastante distintas entre si, é de se esperar que, para um ajuste global, ao longo de uma ampla faixa de frequências, o processo torne-se moroso. Além disso, a obtenção de estimativas iniciais para os parâmetros torna-se ainda mais complicada, isso sem contar o fato de que os termos do agora somatório $\bar{h}(s)$ não são funções ortogonais (GIBSON e MCTAVISH, 1995).

De modo a contornar esses problemas, Gibson e McTavish (1995) propõem, para o modelo GHM padrão, uma redução de parâmetros, com o módulo complexo de cisalhamento, no domínio de Laplace, sendo dado por

$$\bar{G}(s) = G_0 \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{\hat{\alpha}_{sk} (s^2 + 2\hat{\zeta}_k \hat{\omega}_k s)}{s^2 + 2\hat{\zeta}_k \hat{\omega}_k s + \hat{\omega}_k^2} \right), \quad (4.7.2)$$

onde se assume que todos os valores de $\hat{\zeta}_k$ sejam constantes e que os $\hat{\omega}_k$ variem de forma geométrica, sendo $\hat{\omega}_k = \hat{\omega}_1 r^{k-1}$

Comparando-se a expressão acima com a anterior, observa-se que $G_0 \hat{\alpha}_{sk} = \hat{\alpha}_k$, $2\hat{\zeta}_k \hat{\omega}_k = \hat{\beta}_k$ e $\hat{\omega}_k^2 = \hat{\delta}_k$. Portanto, a redução de parâmetros em termos de $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$ é tal que

$$u\hat{\beta}_k = \sqrt{\hat{\delta}_k}, \quad 0 < u < 1, \quad (4.7.3)$$

onde $u = \frac{1}{2\hat{\zeta}_k}$, sendo que $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$ ficam restritos à série geométrica

$$\hat{\beta}_1 r^{k-1} = \hat{\beta}_k, \quad (4.7.4)$$

onde r é um novo parâmetro que indica a razão geométrica de crescimento do valor de $\hat{\beta}$ (o que decorre da relação entre $\hat{\omega}$ e $\hat{\beta}$) e k varia a partir de um, indicando o termo adicional em que $\hat{\beta}$ está inserido.

O intervalo do novo parâmetro u , definido acima, é obtido quando se observa, em conjunto, a equação (4.5.10) com o valor de $\Omega_{\min} \rightarrow 0$ e o intervalo imposto $(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}, \hat{\delta}) > 0$. Ou seja, se $\hat{\beta}_k > \sqrt{\hat{\delta}_k}$, para que se satisfaça a equação (4.7.3), u deve ser menor que um. Como ambos os parâmetros devem ser positivos, u necessita ser maior que zero. Estabelece-se, assim, o intervalo deste novo parâmetro.

Feita esta redução, o modelo GHM passa de $3n+1$ parâmetros, no caso padrão expandido, para $n+4$ parâmetros a serem determinados (para $n > 1$, já que, caso n seja igual a 1 o número de parâmetros a serem determinados é $n+3$), no caso acima, sendo n o número de termos na função dissipação $\bar{h}(s)$. Esses termos são conhecidos como termos GHM. Já o modelo discutido nessa seção será referido como modelo GHM restringido.

5 MÉTODOS EXPERIMENTAIS E DE MINIMIZAÇÃO

5.1 Transmissibilidades Analítica e Experimental

De modo a relacionar os modelos matemáticos de material viscoelástico, expostos nos capítulos anteriores, com resultados experimentais, considera-se um sistema de um grau de liberdade, de massa “m”, ligado a uma base rígida através de um elemento flexível, cuja flexibilidade provém apenas da parte viscoelástica do mesmo, como mostrado na figura 5.1(a). Esse elemento apresenta, então, a seguinte equação de rigidez:

$$\bar{k} = \mathfrak{G} \bar{G}(\Omega) , \quad (5.1.1)$$

onde \bar{k} é a rigidez complexa, \mathfrak{G} é um fator dependente do tipo de deformação e da forma geométrica do elemento e possíveis inserções metálicas e \bar{G} o módulo complexo de cisalhamento do material viscoelástico do elemento.

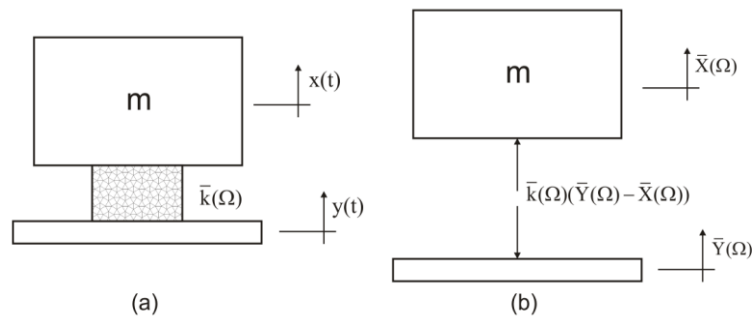


Figura 5.1 - Modelo de um grau de liberdade com elemento viscoelástico

O movimento da base, $y(t)$, é prescrito e assume-se que ele não sofre nenhuma influência de retroalimentação.

Como, na figura 5.1(b), todas as quantidades envolvidas são escritas no domínio da frequência, o equilíbrio dinâmico do sistema pode ser expresso por

$$\bar{k}(\Omega) [\bar{X}(\Omega) - \bar{Y}(\Omega)] = m\Omega^2 \bar{X}(\Omega) . \quad (5.1.2)$$

Com base nessa equação, pode-se escrever a seguinte transmissibilidade

$$\bar{T}(\Omega) = \frac{\bar{X}(\Omega)}{\bar{Y}(\Omega)} = \frac{\bar{k}(\Omega)}{\bar{k}(\Omega) - m\Omega^2}. \quad (5.1.3)$$

A transmissibilidade complexa $\bar{T}(\Omega)$ é uma função resposta em frequência, que liga a saída $\bar{X}(\Omega)$ à entrada $\bar{Y}(\Omega)$ (observe-se que $\bar{X}(\Omega)$ e $\bar{Y}(\Omega)$ são as transformadas de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente).

Usando-se a expressão (5.1.1), a equação (5.1.3) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\bar{T}(\Omega) = \frac{\bar{G}(\Omega)}{\bar{G}(\Omega) - m_g \Omega^2}, \quad (5.1.4)$$

onde o fator $m_g = m/g$.

Decorre, então, que a função $\bar{T}(\Omega)$ será uma função analítica da frequência e de outros parâmetros, dependendo do modelo de material viscoelástico a ser utilizado.

Agora, assume-se que $x(t)$ e $y(t)$ são digitalmente medidos nos instantes t_i , $i=1,N$, onde N é um número na forma $N=2^n$, sendo n um número inteiro. A partir dessas duas séries temporais, a transmissibilidade experimental $\bar{T}_E(\Omega_j)$ pode ser computada como

$$\bar{T}_E(\Omega_j) = \frac{S_{XY}(\Omega_j)}{S_{YY}(\Omega_j)}, j=1,p, \quad (5.1.5)$$

onde p é um número inteiro menor ou igual a $N/2$, $\Omega_{N/2}$ é a frequência de Nyquist, $S_{XY}(\Omega_j)$ é o espectro cruzado de potência de $x(t)$ e $y(t)$ e $S_{YY}(\Omega_j)$ é o auto espectro de potência de $y(t)$.

Defina-se, então, o vetor de erro complexo $\bar{\mathbf{e}}$, cujas entradas são

$$\bar{e}_j = \bar{T}(\Omega_j) - \bar{T}_E(\Omega_j), j=1,p. \quad (5.1.6)$$

Pode-se, assim, definir uma função objetivo de erro quadrático tal que

$$f(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{e}}^H \bar{\mathbf{e}}, \quad (5.1.7)$$

onde \mathbf{x} é um vetor que contém os parâmetros do modelo utilizado para a caracterização do material (variáveis de projeto do problema de otimização).

Para derivadas fracionárias, o vetor \mathbf{x} é dado por

$$\mathbf{x}^T = [G_0, G_1, b, \beta]. \quad (5.1.8)$$

Já para o modelo GHM padrão, o vetor \mathbf{x} é expresso por

$$\mathbf{x}^T = [G_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}] \quad (5.1.9)$$

enquanto que para o modelo GHM alternativo tem-se

$$\mathbf{x}^T = [G_\infty, \hat{\mu}, \hat{\theta}, \hat{\beta}, \hat{\delta}]. \quad (5.1.10)$$

Nas expressões acima, o índice H significa conjugado transposto, ao passo que o índice T significa transposto.

Computando-se o vetor \mathbf{x} de forma a minimizar $f(\mathbf{x})$, ou seja, de modo que a soma dos erros quadráticos definida pela expressão (5.1.7) alcance seu valor mínimo, obtêm-se os valores dos parâmetros materiais na temperatura de ensaio.

5.2 Cálculo do fator m_g

Nos métodos de ajuste de dados experimentais aos modelos considerados no presente trabalho, é de suma importância a obtenção do fator m_g , presente na equação (5.1.4). O valor deste fator é calculado de acordo com o corpo de prova do material viscoelástico, cujo comportamento dinâmico se acredita ser modelado pelo modelo de um grau de liberdade anteriormente considerado. No presente trabalho, despreza-se a dilatação volumétrica de elementos viscoelásticos.

O corpo de prova empregado consiste, basicamente, de uma massa localizada de forma central em um suporte vazado, sendo sustentada por dois elementos de material viscoelástico, que fazem o papel de mola do sistema, em deformação por cisalhamento. A figura 5.2 exibe

uma vista frontal do corpo de prova, já com dois acelerômetros posicionados, um no suporte (base) e outro na massa central.

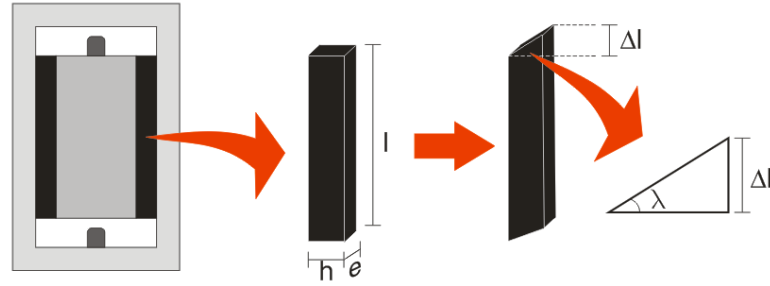


Figura 5.2 - Detalhe do corpo de prova

A área total de cisalhamento é dada por

$$A = 2le, \quad (5.2.1)$$

onde o fator 2 multiplica a altura (l) e a espessura (e) pelo motivo de haver dois elementos viscoelásticos.

Considerando deformações muito pequenas, pode-se dizer que a deformação cisalhante γ de cada elemento é aproximadamente igual à tangente do ângulo λ , de modo que

$$\gamma \cong \tan \lambda = \frac{\Delta l}{h}. \quad (5.2.2)$$

Como a tensão cisalhante correspondente é dada por

$$\tau = \bar{G}\gamma \quad (5.2.3)$$

e a tensão cisalhante média é a razão da força aplicada sobre a área, a equação (5.2.3) pode ser escrita como

$$\frac{F}{A} = \bar{G} \frac{\Delta l}{h}. \quad (5.2.4)$$

donde resulta que a relação entre força e deslocamento, que determina uma constante de rigidez, é

$$\bar{k} = \frac{F}{\Delta l} = \bar{G} \frac{A}{h}. \quad (5.2.5)$$

Como da equação (5.1.1)

$$\vartheta = \frac{\bar{k}}{\bar{G}}, \quad (5.2.6)$$

e, por definição, $m_{\vartheta} = m/\vartheta$, então, para o corpo de prova considerado, com dois elementos viscoelásticos,

$$m_{\vartheta} = \frac{m\bar{G}}{\bar{k}} = \frac{m\bar{G}h}{A\bar{G}} = \frac{mh}{2le}. \quad (5.2.7)$$

As medidas dos elementos de elastômeros dos corpos de prova, empregados no levantamento das transmissibilidades experimentais, foram $e=16\text{mm}$, $l=48\text{mm}$ e $h=14\text{mm}$. A densidade do material utilizado na massa central, qual seja, aço, foi considerada como igual a 7850kg/m^3 . Assim a massa m foi $0,0844\text{kg}$ e o valor de m_{ϑ} igual a $0,7693\text{kg}$.

5.3 Obtenção dos dados experimentais

Os dados experimentais utilizados foram obtidos a partir de ensaios realizados em um elastômero comercial, a saber, uma composição de borracha butílica. A montagem para realização dos experimentos é apresentada esquematicamente na figura 5.2. Nela, foram utilizados dois acelerômetros, um medindo a aceleração do suporte (base) e o outro a aceleração da massa central. A razão entre seus sinais forneceu, então, as transmissibilidades experimentais que foram empregadas na obtenção de estimativas para os parâmetros dos modelos.

As medições foram realizadas em temperaturas de -20°C a 60°C , com um intervalo de 10°C , em uma faixa de frequências de 0 a 2000Hz . O sinal de excitação enviado pelo gerador

de sinais até o excitador, passando pelo amplificador de potência, era do tipo *chirp*, na faixa de frequência já mencionada. Os sinais de aceleração foram processados num analisador de sinais dinâmicos.

Essas medições não foram executadas durante o curso do presente trabalho, mas durante o envolvimento anterior do signatário na caracterização dinâmica de elastômeros, junto ao Grupo de Pesquisa Integrada em Sistemas Vibrantes e Acústicos (PISA), do Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA) da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

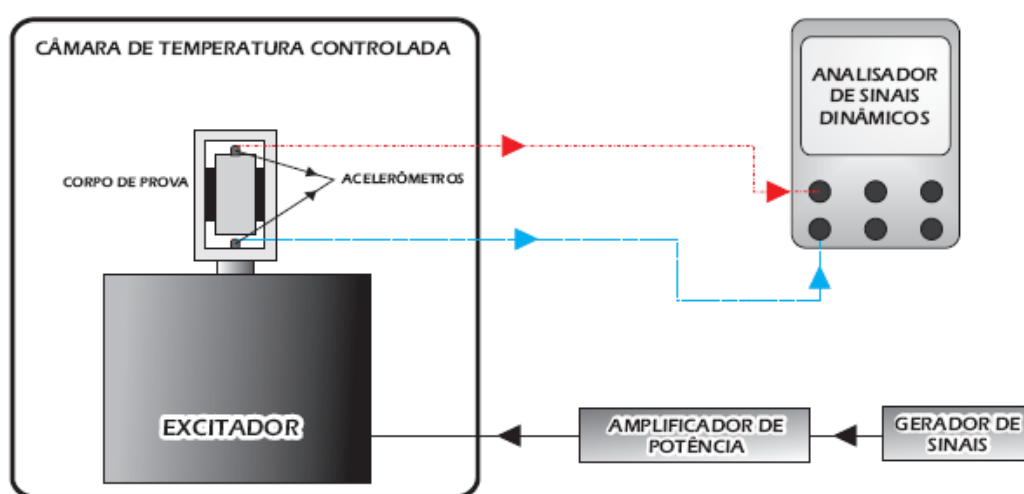


Figura 5.3 - Esquema da montagem do experimento dos elastômeros.

5.4 Caracterização dinâmica integrada

As expressões (3.1.9), (4.2.2) e (4.2.3) fornecem o módulo complexo de cisalhamento, via modelos de DF e GHM em função da frequência. Contudo, como já visto, além da frequência, a temperatura também é uma importante variável ambiental a ser considerada. Daí a razão de serem realizados experimentos não só ao longo da frequência, mas também ao longo de uma série de temperaturas.

Como os efeitos de frequência e temperatura podem ser relacionados, utilizando o princípio da superposição, os materiais viscoelásticos podem ser dinamicamente caracterizados de forma integrada (LOPES et al., 2004).

Para tanto, são incorporados aos modelos de DF e GHM os efeitos de temperatura, modelados através da equação WLF (vide seção 2). Tem-se, assim,

$$\bar{G}(\Omega, T) = \frac{G_0 + G_1 b_0 [i\alpha_T(T)\Omega]^\beta}{1 + b_0 [i\alpha_T(T)\Omega]^\beta} \quad (\text{DF}), \quad (5.4.1)$$

$$\bar{G}(\Omega, T) = G_0 + \frac{\hat{\alpha}\{-[\alpha_T(T)\Omega]^2 + i\hat{\beta}\alpha_T(T)\Omega\}}{-[\alpha_T(T)\Omega]^2 + i\hat{\beta}\alpha_T(T)\Omega + \hat{\delta}} \quad (\text{GHM padrão}), \quad (5.4.2)$$

e

$$\bar{G}(\Omega, T) = G_\infty + \frac{i\hat{\theta}[\alpha_T(T)\Omega] + \hat{\mu}}{-[\alpha_T(T)\Omega]^2 + i\hat{\beta}\alpha_T(T)\Omega + \hat{\delta}} \quad (\text{GHM alternativo}), \quad (5.4.3)$$

onde o fator de deslocamento α_T é dado pela expressão (2.4.3).

A transmissibilidade complexa da equação (5.1.4) é reescrita em função da frequência e da temperatura como

$$\bar{T}(\Omega, T) = \frac{\bar{G}(\Omega, T)}{\bar{G}(\Omega, T) - m_g \Omega^2}. \quad (5.4.4)$$

Observando-se as equações anteriores percebe-se que as transmissibilidades são funções de várias variáveis. Para os modelos de DF, GHM padrão e GHM alternativo tem-se, então

$$\bar{T}(\Omega, T) = f(\Omega, T, G_0, G_1, b_0, \beta, \theta_1, \theta_2, T_0), \quad (5.4.5)$$

$$\bar{T}(\Omega, T) = f(\Omega, T, G_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \theta_1, \theta_2, T_0), \quad (5.4.6)$$

e

$$\bar{T}(\Omega, T) = f(\Omega, T, G_\infty, \hat{\theta}, \hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, \theta_1, \theta_2, T_0) \quad (5.4.7)$$

Na sequência, define-se a matriz de erro complexa $\bar{\mathbf{e}}$, cujas entradas são

$$\bar{e}_{jk} = \bar{T}(\Omega_j, T_k) - \bar{T}_e(\Omega_j, T_k), j=1,p \text{ e } k=1,q, \quad (5.4.8)$$

onde q é o número de temperaturas de ensaio.

Pode-se, agora, definir uma nova função objetivo, tal que

$$f(x) = \sum_{k=1}^q \left[\sum_{j=1}^p (\bar{e}_{kj})^C (\bar{e}_{jk}) \right], \quad (5.4.9)$$

onde o índice C significa conjugado.

O vetor \mathbf{x} das variáveis de projeto passa a ser dado, para os modelos de DF, GHM padrão e GHM alternativo, por

$$\mathbf{x}^T = [G_0, G_1, b_0, \beta, m_g, \theta_1, \theta_2, T_0], \quad (5.4.10)$$

$$\mathbf{x}^T = [G_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, m_g, \theta_1, \theta_2, T_0], \quad (5.4.11)$$

e

$$\mathbf{x}^T = [G_\infty, \hat{\theta}, \hat{\mu}, \hat{\beta}, \hat{\delta}, m_g, \theta_1, \theta_2, T_0], \quad (5.4.12)$$

respectivamente.

A minimização de $f(\mathbf{x})$, como definida acima, permite que todas as funções transmissibilidade experimentais sejam utilizadas simultaneamente para a determinação integrada dos parâmetros materiais finais de um dado elastômero, incluindo-se aqueles parâmetros relativos ao fator de deslocamento α_T . Dessa forma, numa única etapa, obtêm-se os elementos necessários à caracterização completa do material, que pode ser expressa na forma gráfica, pelo nomograma de frequência reduzida, ou na forma analítica, pelas expressões vistas neste capítulo (LOPES et al., 2004; LOPES, 1998).

5.5 Algoritmos Genéticos (AGs)

A fim de buscar que os modelos estudados fossem ajustados aos dados experimentais de forma padronizada e, tanto quanto possível, em igualdade de condições, a estimativa inicial dos parâmetros foi feita através da técnica de algoritmos genéticos, limitando-se a região de busca de acordo com as possibilidades de cada modelo, através da técnica de otimização não linear via método Quase-Newton. Obtidos os valores iniciais partiu-se, então, para a minimização das funções objetivo correspondentes. Todos os procedimentos foram implementados através do pacote computacional *Toolbox Optimization* do MATLAB®.

Algoritmos genéticos são algoritmos de procura baseados nos mecanismos de seleção natural e genética. A idéia geral consiste em selecionar os indivíduos mais aptos e combinar, de forma aleatória, suas estruturas, para gerar novos indivíduos. Em cada nova geração, um novo conjunto de “criaturas artificiais” (*strings*) é criado, usando partes dos indivíduos anteriores.

Segundo Goldberg (1989), há quatro grandes diferenças do método dos algoritmos genéticos para os métodos normais de otimização e procedimentos de procura. São eles:

1. AGs trabalham com uma codificação do conjunto de parâmetros, e não com os parâmetros propriamente ditos;
2. AGs procuram por uma população de pontos, não apenas por um único ponto;
3. AGs usam informações diretas da função objetivo, não usando derivadas ou outras informações auxiliares;
4. AGs usam regras de transição probabilísticas e não regras determinísticas.

Um algoritmo genético utiliza três tipos principais de regras, em cada etapa de criação da próxima geração de indivíduos a partir da população em curso. Esses tipos principais são os seguintes:

1. Seleção: seleciona os indivíduos, chamados pais, que contribuem para formação da população da próxima geração;
2. Cruzamento (*Crossover*): combina dois pais, para formar os filhos da próxima geração;
3. Mutação: aplica mudanças aleatórias individuais nos pais, para formar os filhos.

AGs são muito eficientes em grandes espaços de busca, por serem algoritmos de busca aleatorizada, ou seja, utilizam escolhas aleatórias como ferramenta para guiar procedimentos

de busca altamente explorativos, através do espaço dos parâmetros. Por esse motivo, é uma técnica que permite que se encontrem ótimos globais de funções objetivo que apresentam muitos ótimos locais (pontos onde a função apresenta valores menores do que em sua volta, mas maiores que pontos distantes do espaço de procura). Uma representação de função desse tipo é dada na figura 5.4, que mostra a chamada função de Rastrigin, onde ocorrem inúmeros mínimos locais.

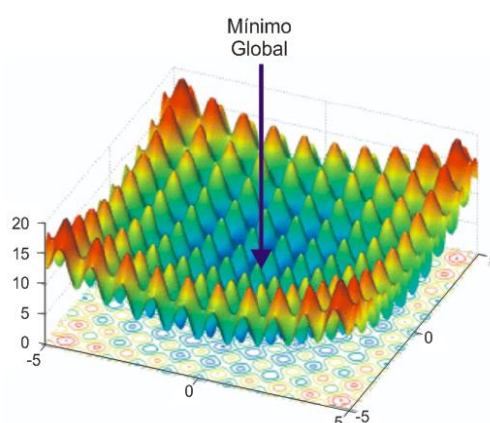


Figura 5.4 - Função com múltiplos mínimos locais (fonte: www.mathworks.com)

No presente trabalho, através de uma curta execução do procedimento de algoritmos genéticos foram obtidos valores próximos a um mínimo global. Esses resultados intermediários, por meio de uma técnica de otimização não-linear, foram refinados, permitindo que se extraísse o melhor de cada técnica. A análise dos resultados finais obtidos foi feita gráfica e analiticamente, através de valores de qualidade de ajuste. O uso combinado de AGs e otimização não-linear foi inspirado em Bavastri et al. (1998), onde se abordou o projeto ótimo de neutralizadores viscoelásticos de forma semelhante.

5.6 Otimização não linear

Ao realizar o ajuste de curvas da forma combinada, ou híbrida, descrita acima, é necessário que se use um procedimento de otimização não linear para refinar os resultados intermediários obtidos pelo método de algoritmos genéticos. Escolheu-se, para realizar esta tarefa, a rotina `fmincon`, disponível no pacote computacional MATLAB®. Essa rotina permite que se encontre um mínimo de uma função objetivo multivariável, a partir de estimativas

iniciais dadas, aplicando-se, ainda, limites inferiores e superiores para os parâmetros procurados. A isto dá-se o nome de otimização não linear restringida.

A rotina fmincon apresenta, isoladamente, algumas limitações, tais como obtenção de mínimos de forma local e necessidade de que a função objetivo seja contínua e real.

A fmincon usa um método de programação quadrática sequencial (PQS). Neste método, a função resolve um subproblema de programação quadrática (PQ) em cada iteração. Uma aproximação realizada na Hessiana da função Lagrangeana é feita a cada iteração, utilizando um método de atualização de Quase-Newton, que no caso da fmincon, é o método BFGS, cuja fórmula é dada por

$$H_{k+1} = H_k + \frac{q_k q_k^T}{q_k^T g_k} - \frac{H_k^T g_k g_k^T H_k}{g_k^T H_k g_k}, \quad (5.6.1)$$

onde H é a matriz Hessiana, $g_k = x_{k+1} - x_k$ e $q_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$, sendo x_k a solução da função objetivo na iteração k .

5.7 Comparações entre Modelos e Coeficiente R^2

Os resíduos (rd) de um certo ajuste de curva são determinados pela diferença entre os valores experimentais y e os valores preditos \hat{y} (obtidos pelo ajuste) em cada ponto (x,y) , de modo que

$$rd = y - \hat{y}. \quad (5.7.1)$$

Se os resíduos aparecem de forma aleatória é razoável se supor que o modelo se ajusta de maneira não tendenciosa, enquanto que, ao se darem de forma sistemática, oferecem um indicativo de que o ajuste pode ser tendencioso.

A figura 5.5 mostra um gráfico em que os resíduos são apresentados como distâncias verticais entre valores experimentais e ajustados, enquanto a figura 5.6 apresenta os mesmos resíduos, representados apenas por seus valores.

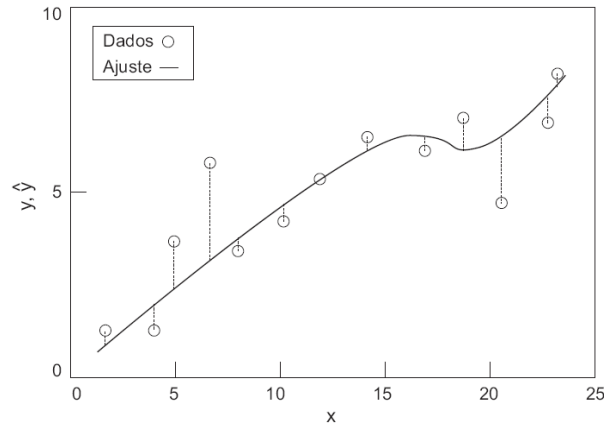


Figura 5.5 - Valores experimentais e ajustados com respectivos resíduos

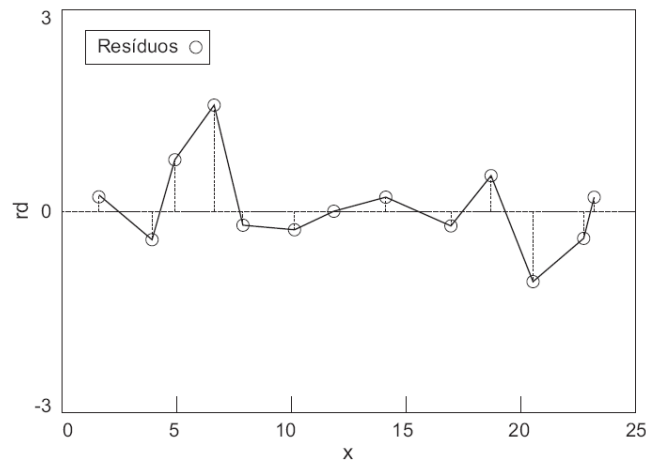


Figura 5.6 - Resíduos da figura 5.5

A soma quadrática dos valores dos resíduos fornece um indicativo da qualidade do ajuste feito. Quanto menor for o valor dessa soma, melhor é o ajuste obtido. Idealmente ter-se-ia o valor nulo, quando feita a soma dos quadrados dos resíduos.

Isso pode ser observado ao se analisar o coeficiente de determinação R^2 . Este coeficiente, também conhecido como R-quadrado, é definido por

$$R^2 \equiv 1 - \frac{SSE}{SST}, \quad (5.7.2)$$

onde SSE é a soma dos quadrados dos resíduos e SST é a soma dos quadrados das diferenças entre os valores experimentais e sua média. Numericamente, tem-se que

$$SSE = \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (5.7.3)$$

$$SST = \sum_i (y_i - \bar{y})^2 \quad (5.7.4)$$

e

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i, \quad (5.7.5)$$

onde n , aqui é o número de pontos experimentais (DRAPER, 1998).

Um valor de R^2 igual a 1 (um) indica que a curva de ajuste representa os dados experimentais de forma perfeita. Por outro lado, um valor de R^2 igual a 0 (zero) indica que a soma dos quadrados dos resíduos é tão significativa que é comparável à variância dos dados experimentais. Assim quanto menor for o SSE, melhor é o resultado obtido.

Anderson-Sprecher (1994) comenta que o R^2 não tem seu uso bem visto entre os estatísticos. Porém, afirma que ele é valioso, desde que visto como o resultado da comparação entre dois modelos, sendo um o modelo efetivamente empregado e o outro, o modelo nulo, ou seja, a ausência de modelo. Afirma ainda que o R^2 , dado pela forma generalizada indicada na equação (5.7.2), pode ser utilizado em modelos de regressão não linear, tal como no presente caso.

Há que se observar também que, neste trabalho, lida-se com grandezas complexas, o que implica resíduos também complexos. Já as somas quadráticas das equações anteriores são redefinidas como somas de multiplicações dos valores envolvidos por seus complexos conjugados. Assim, a soma dos quadrados dos resíduos torna-se a soma dos quadrados dos valores absolutos das diferenças entre os valores experimentais e os preditos. Ou seja, um número real. Isso é consistente com a definição de variância de variáveis aleatórias complexas, também um número real (PAPOULIS, 1984).

6 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

6.1 Considerações Gerais

Os experimentos realizados forneceram, como dados, a transmissibilidade do corpo de prova em várias temperaturas. Esses dados, por apresentarem uma certa discrepância nas frequências iniciais e finais, foram tratados, de forma que o ponto inicial utilizado nos ajustes pertencesse à região imediatamente fora dessa zona de não conformidade. Ou seja, buscou-se garantir que todos os pontos experimentais tivessem valores de coerência iguais ou muito próximos de 1 (um). Dessa forma, a faixa real de frequências estudada foi de 32,5Hz a 1997,5Hz. As temperaturas de ensaio, coletadas a partir do sensor de temperatura localizado no interior da câmara térmica, foram -18,3°C, -10,0°C, 0,3°C, 9,8°C, 20,0°C, 30,0°C, 39,9°C, 50,0°C e 60,2°C.

Como etapa inicial, foram feitos ajustes para cada temperatura individualmente, utilizando-se, a princípio, algoritmos genéticos e refinando-se o resultado intermediário com a rotina *fmincon* do MATLAB®. A fim de encurtar o tempo de processamento, orientou-se a rotina de algoritmo genético a procurar pelos valores ótimos em uma dada região, limitada por valores inferiores e superiores que abrangessem as regiões de busca de cada modelo, tal como exposto anteriormente. Na etapa seguinte foi realizado o ajuste simultâneo de dados relativos a três temperaturas. Por fim, foram considerados, de forma integrada, os dados de todas as nove temperaturas.

Quando se considera apenas um ensaio em faixa de frequência, em uma única temperatura, esses limites da região de busca, tornam-se de difícil visualização, tanto para o método baseado em DF, quanto para o método baseado em modelos GHM. Sendo assim, os limites aplicados envolvem uma faixa bastante ampla de possíveis valores paramétricos. Já para os casos de caracterização integrada, os limites empregados para o método baseado em DF são mais facilmente obtidos, o que auxilia bastante na convergência do ajuste e simplifica o processo. Por outro lado, por características já apresentadas, o método baseado em modelos GHM não apresenta tanta facilidade em se obter limites tão restritos, que levem a regiões de busca tão pequenas quanto às do método via DF.

Na seção a seguir, são apresentados, para os dois métodos, os resultados obtidos para cada temperatura. Ressalta-se que, para o método baseado em modelos GHM, foi feito o desmembramento em GHM padrão (vide seção 4.1), GHM alternativo (vide seção 4.1) e GHM restringido (vide seção 4.7). Para cada um desses desmembramentos foram realizados

ajustes com um e três termos na função dissipação. Feita essa análise preliminar dos três tipos do modelo, foi escolhido apenas um para representar o método baseado em modelos GHM, uma vez que os três modelos não forneceram resultados significativamente distintos entre si.

As equações empregadas explicitam, além dos valores fundamentais dos parâmetros próprios dos modelos, também os valores das ordens de grandeza desses parâmetros. Este procedimento busca considerar todos os parâmetros numa mesma ordem de grandeza, para que não haja diferenças na influência de cada um sobre os resultados dos ajustes. Para o modelo via DF, a equação utilizada é

$$\bar{G}(\Omega, T) = \frac{x(1).10^{x(5)} + [x(2).10^{x(6)}] \cdot [x(4).10^{x(7)}] \cdot i.\alpha_T(T).\Omega^{[x(3).10^{x(8)}]}}{1 + [x(4).10^{x(7)}] \cdot i.\alpha_T(T).\Omega^{[x(3).10^{x(8)}]}}. \quad (6.1.1)$$

Comparando a equação (6.1.1) com a equação (5.4.1), chega-se a $x(1).10^{x(5)} = G_0$, $x(2).10^{x(6)} = G_1$, $x(4).10^{x(7)} = b_0$ e $x(3).10^{x(8)} = \beta$

As equações correspondentes para o método baseado nos modelos GHM padrão e alternativo são apresentadas a seguir, sendo que os modelos aqui mostrados possuem apenas um termo. Para se visualizar as equações com três termos, basta incluir os termos adicionais.

A equação para o GHM padrão é

$$\bar{G}(\Omega, T) = x(1).10^{x(5)} + \frac{[x(2).10^{x(6)}] \cdot i.\alpha_T(T).\Omega^2 + i.\alpha_T(T).\Omega \cdot [x(3).10^{x(7)}] }{i.\alpha_T(T).\Omega^2 + i.\alpha_T(T).\Omega \cdot [x(3).10^{x(7)}] + [x(4).10^{x(8)}]}, \quad (6.1.2)$$

onde seguindo a equação (5.4.2) determina-se a relação $x(1).10^{x(5)} = G_0$, $x(2).10^{x(6)} = \hat{\alpha}$, $x(3).10^{x(7)} = \hat{\beta}$ e $x(4).10^{x(8)} = \hat{\delta}$.

Para o GHM alternativo, a equação utilizada tem a forma

$$\bar{G}(\Omega, T) = x(1).10^{x(6)} + \frac{[x(2).10^{x(7)}] \cdot i.\alpha_T(T).\Omega - [x(3).10^{x(8)}] }{i.\alpha_T(T).\Omega^2 + i.\alpha_T(T).\Omega \cdot [x(4).10^{x(9)}] + [x(5).10^{x(10)}]}, \quad (6.1.3)$$

onde $x(1).10^{x(6)} = G_\infty$, $x(2).10^{x(7)} = \hat{\theta}$, $x(3).10^{x(8)} = -\hat{\mu}$, $x(4).10^{x(9)} = \hat{\beta}$ e $x(5).10^{x(10)} = \hat{\delta}$, por comparação com a equação (5.4.3).

Para o modelo GHM restringido, a equação apresentada possui três termos, para enfatizar suas características, de forma que

$$\begin{aligned}
 \bar{G}(\Omega, T) = & x(1).10^{x(12)} + \frac{\left[x(2).10^{x(8)} \right] \cdot \left[i.\alpha_T(T).\Omega^2 + i.\alpha_T(T).\Omega \cdot \left[x(3).10^{x(9)} \right] \right]}{i.\alpha_T(T).\Omega^2 + i.\alpha_T(T).\Omega \cdot \left[x(3).10^{x(9)} \right] + \left[x(4).x(3)^2 \right].10^{x(9).2}} \\
 & + \frac{\left[x(5).10^{x(10)} \right] \cdot \left\{ \alpha_T(T).\Omega^2 + i.\alpha_T(T).\Omega \cdot \left[x(3).x(6).10^{x(9)} \right] \right\}}{\left\{ \alpha_T(T).\Omega^2 \right\} + \left\{ \alpha_T(T).\Omega \cdot \left[x(3).x(6).10^{x(9)} \right] \right\} + \left\{ \left[x(4).x(3).x(6)^2 \right].10^{x(9).2} \right\}} \\
 & + \frac{\left[x(7).10^{x(11)} \right] \cdot \left\{ \alpha_T(T).\Omega^2 + \alpha_T(T).\Omega \cdot \left[x(3).x(6)^2.10^{x(9)} \right] \right\}}{\left\{ \alpha_T(T).\Omega^2 \right\} + \left\{ \alpha_T(T).\Omega \cdot \left[x(3).x(6)^2.10^{x(9)} \right] \right\} + \left\{ \left[x(4).x(3).x(6)^2 \right]^2.10^{x(9).2} \right\}}
 \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Comparando a equação (6.1.4) com as equações (4.7.3), (4.7.4) e (5.4.2) em conjunto, chega-se a $x(1).10^{x(12)} = G_0$, $x(2).10^{x(8)} = \hat{\alpha}_1$, $x(3).10^{x(9)} = \hat{\beta}_1$, $x(4)=u$, $x(6)=r$, $x(5).10^{x(10)} = \hat{\alpha}_2$ e $x(7).10^{x(11)} = \hat{\alpha}_3$.

É importante destacar ainda que a rotina de algoritmos genéticos utilizada, disponível no *Toolbox Optimization* do MATLAB® dispõe de algumas opções referentes aos seus procedimentos. Tem-se, a saber, as opções de determinar o tamanho da população, o número de gerações e os limites para os parâmetros, de ajustar os critérios de convergência e, em especial, de se realizar um ajuste combinado, ou híbrido, de forma direta. Foram utilizadas 500 gerações, com uma população de 85 indivíduos e, como dito anteriormente, a rotina *fmincon* como rotina final do método híbrido.

Particularmente, vale comentar que a função mutação escolhida foi a *mutationadaptfeasible*, sendo que os valores de *StallTimeLimit* e *TolFun* foram modificados para 100 e 10^{-20} , respectivamente, mantendo-se todas as outras opções com os valores padrão do MATLAB®. A primeira opção faz com que o algoritmo pare, se não houver melhora de resultado da função objetivo em tal quantidade de segundos. Já a segunda faz com que o algoritmo seja executado até que a variação acumulada do valor da função objetivo (função *fitness*) sobre *StallGenLimit* (cujo valor padrão é 50) seja inferior ao valor de *TolFun*.

6.2 Resultados para Temperaturas Individuais

Os resultados dos ajustes obtidos para a borracha butílica em cada temperatura são apresentados em tabelas e gráficos. Os valores dos parâmetros e dos índices SSE, SST e R^2 encontram-se em tabelas. Já as curvas de transmissibilidade (módulo ou fase) por frequência, de resíduos quadráticos por frequência e de resíduos (módulo) por transmissibilidade ajustada (módulo) são ilustrados em gráficos específicos. Como o algoritmo genético é utilizado de forma truncada, podem ocorrer variações nos valores obtidos. Nesse caso, tomar-se-á sempre o ajuste com os melhores índices alcançados. Como não há variação de temperatura, o valor de α_T é sempre igual a 1 e $b_0 = b$, para o modelo de DF.

6.2.1 Modelo de DF

Os limites inferiores e superiores estabelecidos para os parâmetros, em forma de vetores, foram respectivamente, $Li=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 8 \ -5 \ -8]$ e $Ls=[10 \ 10 \ 9 \ 10 \ 8 \ 15 \ 0 \ 0]$.

Os valores obtidos para os parâmetros na temperatura de $-18,3^\circ\text{C}$ são relacionados nas tabelas 6.1 e 6.2.

Tabela 6.1 - Parâmetros DF $-18,3^\circ\text{C}$

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b (s^β)
$3,2601 \cdot 10^5$	$1,4369 \cdot 10^9$	$4,6720 \cdot 10^{-1}$	$1,7803 \cdot 10^{-3}$

Tabela 6.2 - Índices DF $-18,3^\circ\text{C}$

SSE	SST	R^2
0,0015212	14,9305	0,99990

Já os gráficos correspondentes a esse ajuste são apresentados na figura 6.1.

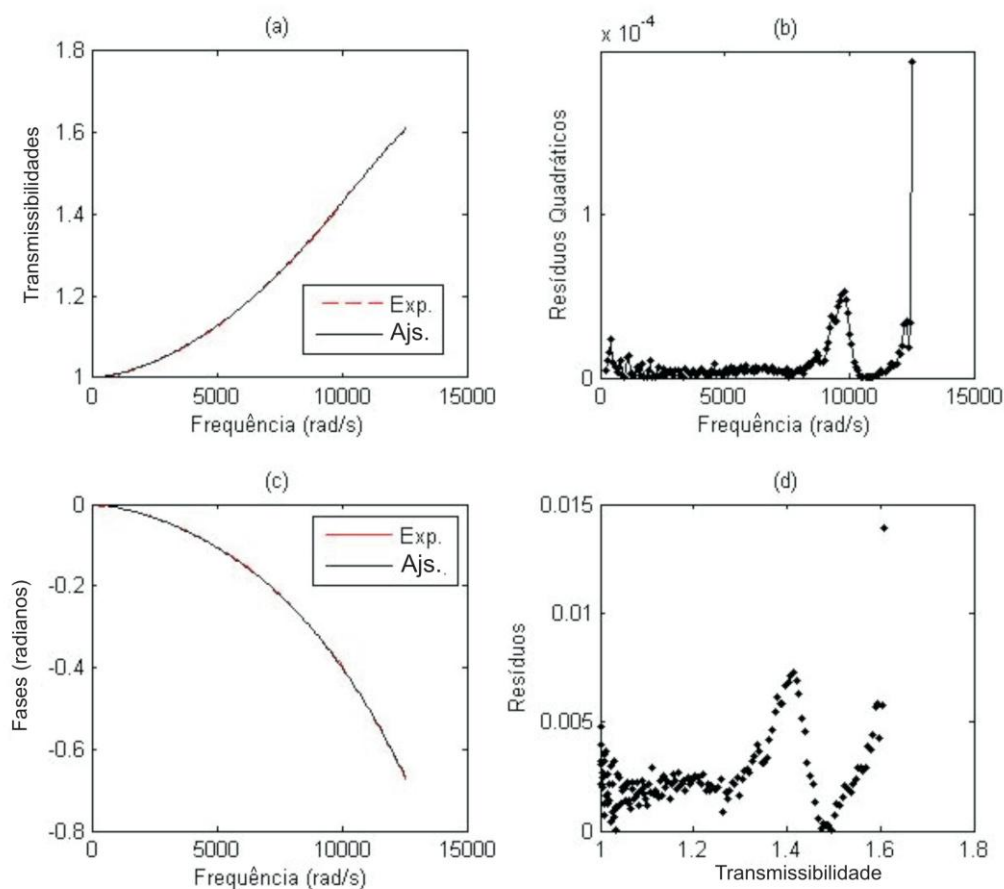


Figura 6.1- (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); -18,3°C - DF

Na sequência, de forma similar, são apresentados os resultados para as temperaturas de -10°C a 60,2°C , nas tabelas 6.3 a 6.18 e nas figuras 6.2 a 6.9, respectivamente

Tabela 6.3 - Parâmetros DF -10°C

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b (s^β)
$4,3268 \cdot 10^6$	$3,1395 \cdot 10^9$	$4,6426 \cdot 10^{-1}$	$4,4547 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.4 - Índices DF -10°C

SSE	SST	R^2
0,0014425	49,7533	0,99997

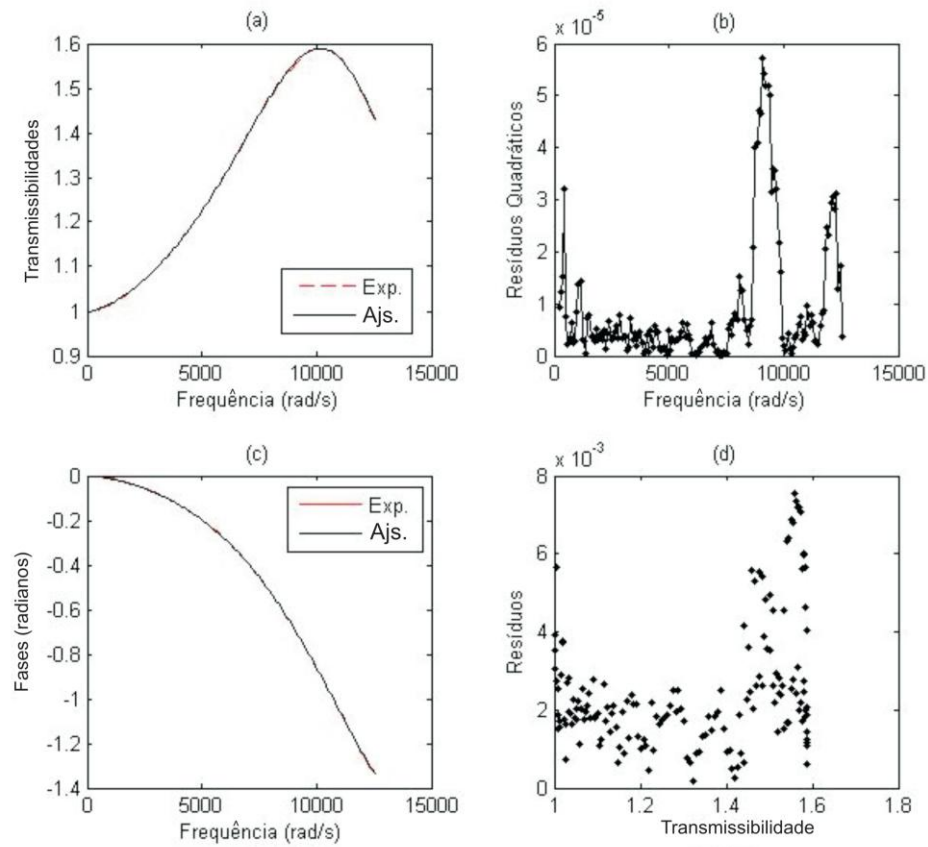


Figura 6.2 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) Resíduos X Transmissibilidade ajustada (módulo); -10°C - DF

Tabela 6.5 - Parâmetros DF 0,3 °C

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b (s^β)
$9,4746 \cdot 10^6$	$1,9076 \cdot 10^9$	$5,0653 \cdot 10^{-1}$	$2,4976 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.6 - Índices DF 0,3°C

SSE	SST	R^2
0,004514	101,1975	0,99996

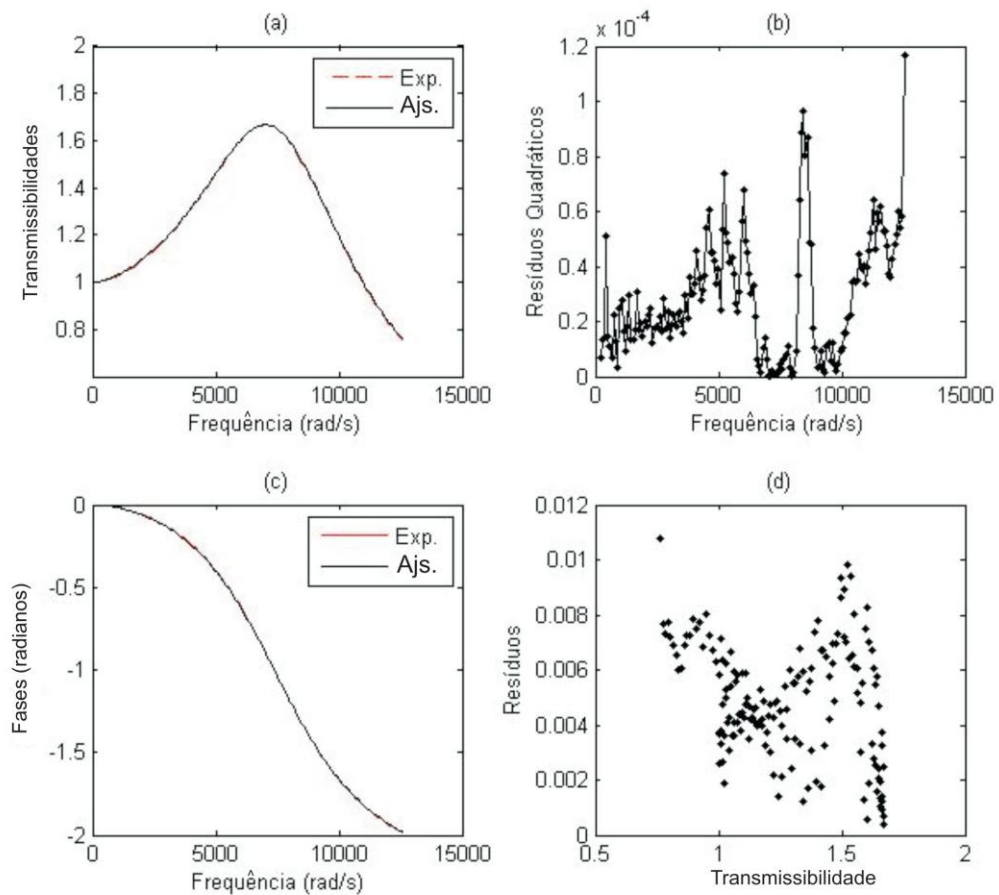


Figura 6.3 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) Resíduos X Transmissibilidade ajustada (módulo); 0,3°C - DF

Tabela 6.7 - Parâmetros DF 9,8°C

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b (s^β)
$8,5237 \cdot 10^6$	$3,7442 \cdot 10^9$	$4,9397 \cdot 10^{-1}$	$7,8924 \cdot 10^{-5}$

Tabela 6.8 - Índices DF 9,8°C

SSE	SST	R^2
0,006825	135,2603	0,99995

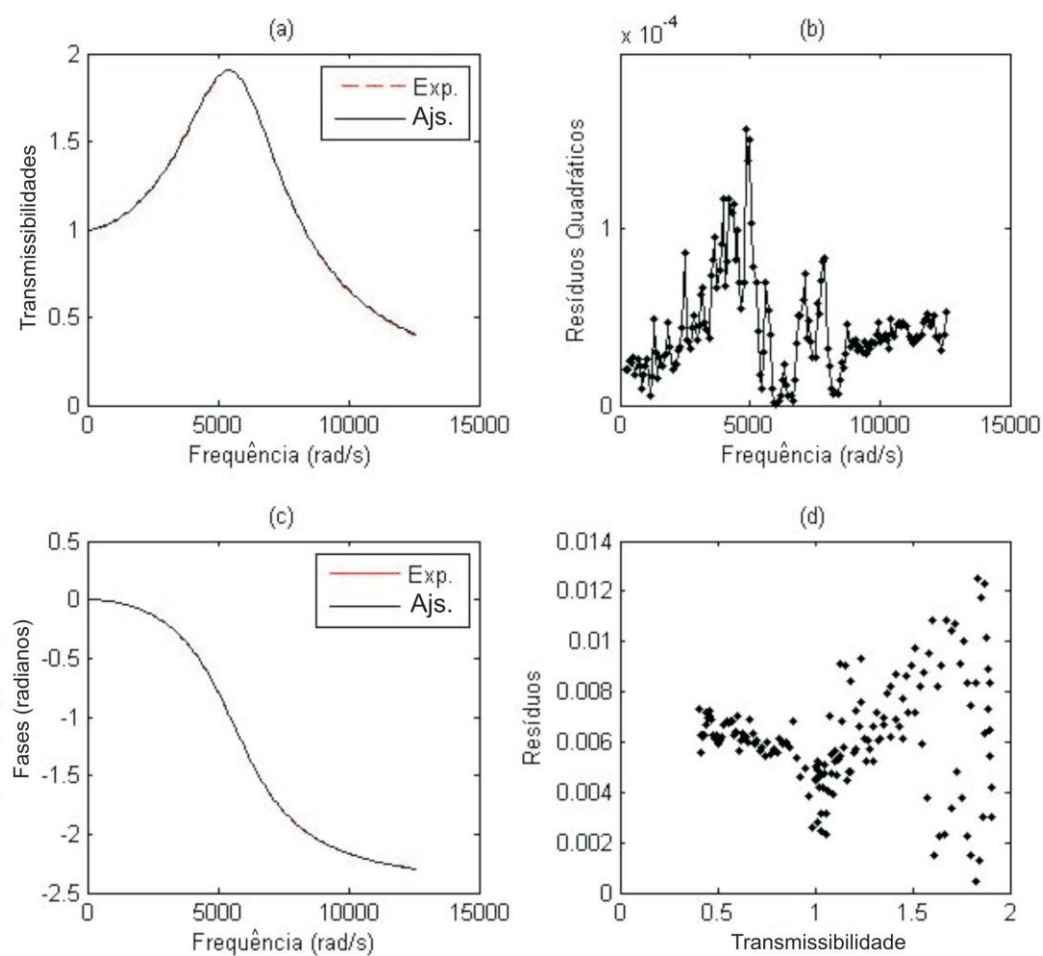


Figura 6.4 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 9,8°C - DF

Tabela 6.9 - Parâmetros DF 20°C

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b (s^β)
$7,6076 \cdot 10^6$	$3,6115 \cdot 10^9$	$4,7557 \cdot 10^{-1}$	$5,9990 \cdot 10^{-5}$

Tabela 6.10 - Índices DF 20°C

SSE	SST	R^2
0,0075274	162,2893	0,99995

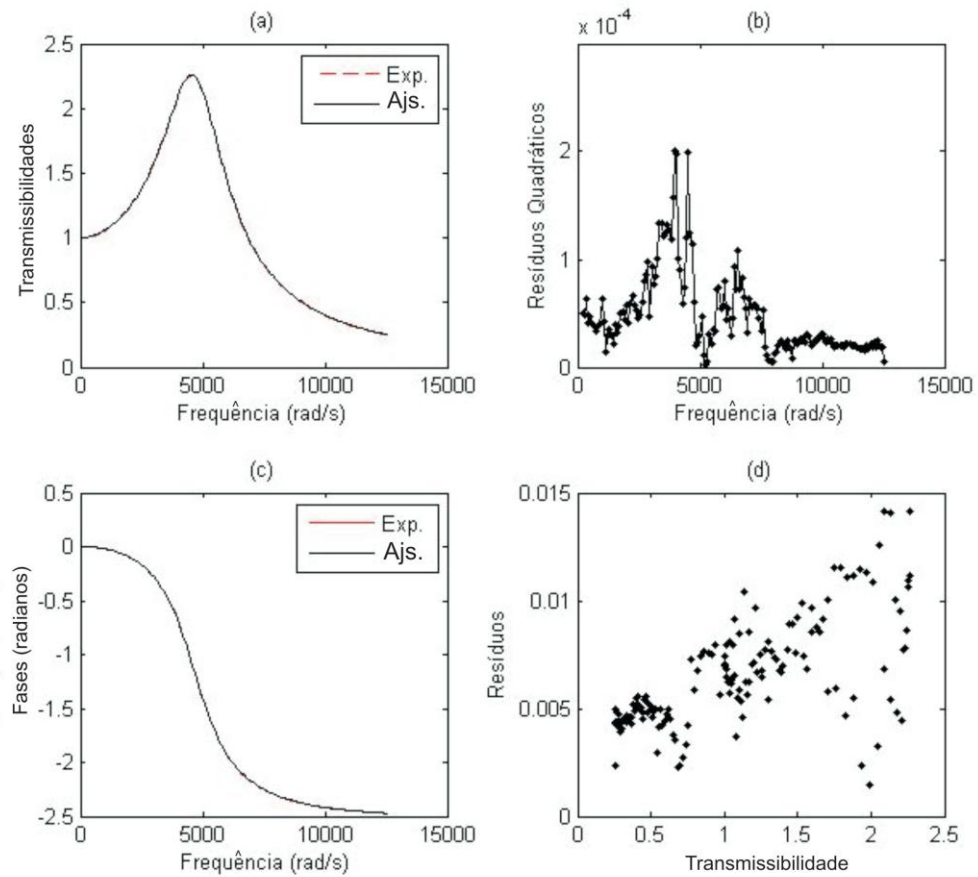


Figura 6.5 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) Resíduos X Transmissibilidade ajustada (módulo); 20°C - DF

Tabela 6.11 - Parâmetros DF 30°C

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b (s^β)
$6,7955 \cdot 10^6$	$1,2785 \cdot 10^9$	$4,5849 \cdot 10^{-1}$	$1,2700 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.12 - Índices DF 30°C

SSE	SST	R^2
0,0096097	190,8724	0,99995

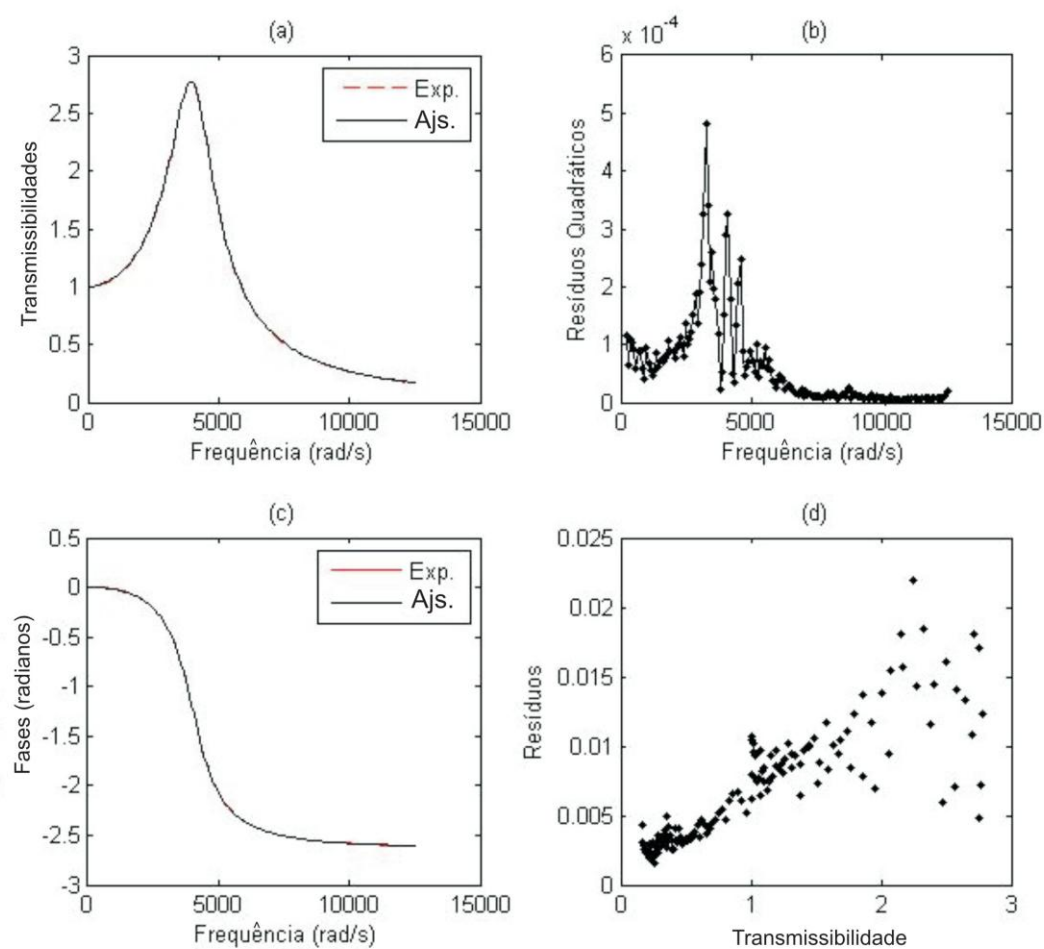


Figura 6.6 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 30°C - DF

Tabela 6.13 - Parâmetros DF 39,9 °C

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b (s^β)
$5,9648 \cdot 10^6$	$2,9814 \cdot 10^8$	$4,5248 \cdot 10^{-1}$	$3,8923 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.14 - Índices DF 39,9°C

SSE	SST	R^2
0,014898	216,5685	0,99993

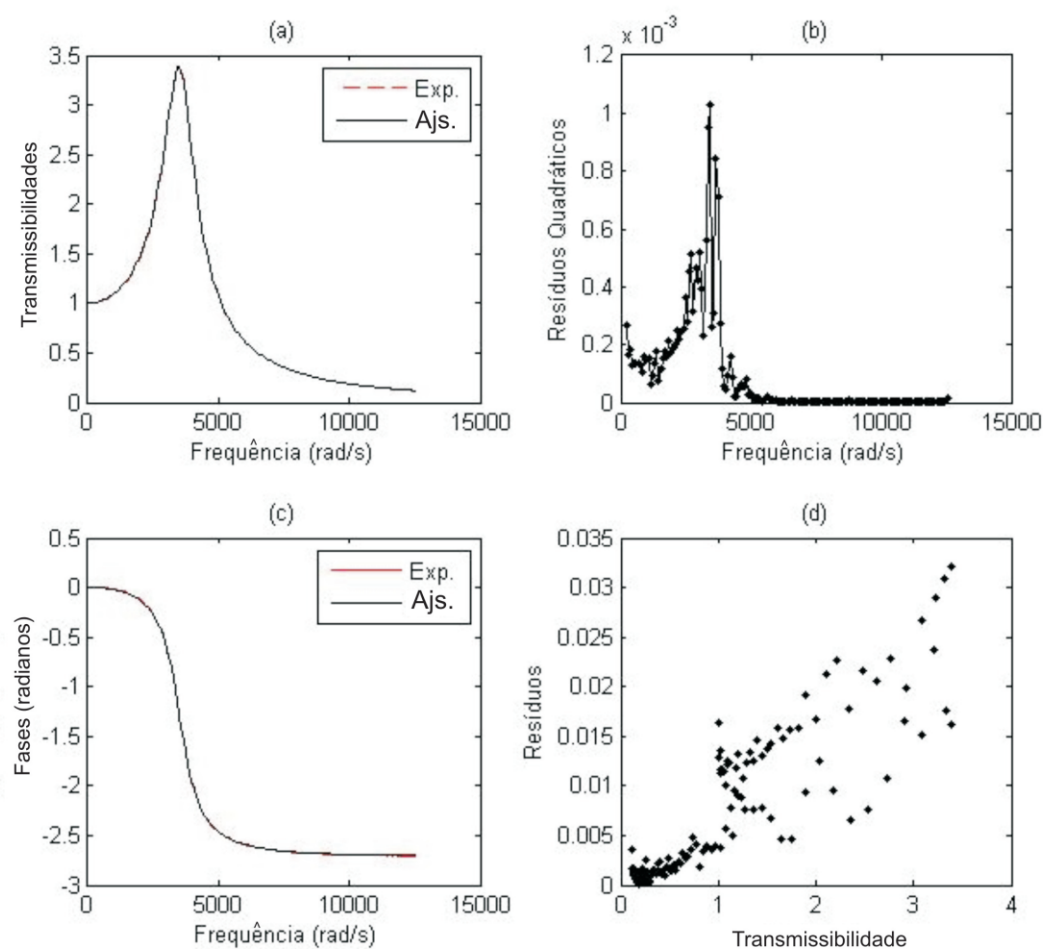


Figura 6.7 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 39,9°C - DF

Tabela 6.15 - Parâmetros DF 50°C

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b (s^β)
$5,1388 \cdot 10^6$	$2,4057 \cdot 10^8$	$4,3437 \cdot 10^{-1}$	$3,9886 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.16 - Índices DF 50°C

SSE	SST	R^2
0,032334	239,4428	0,99986

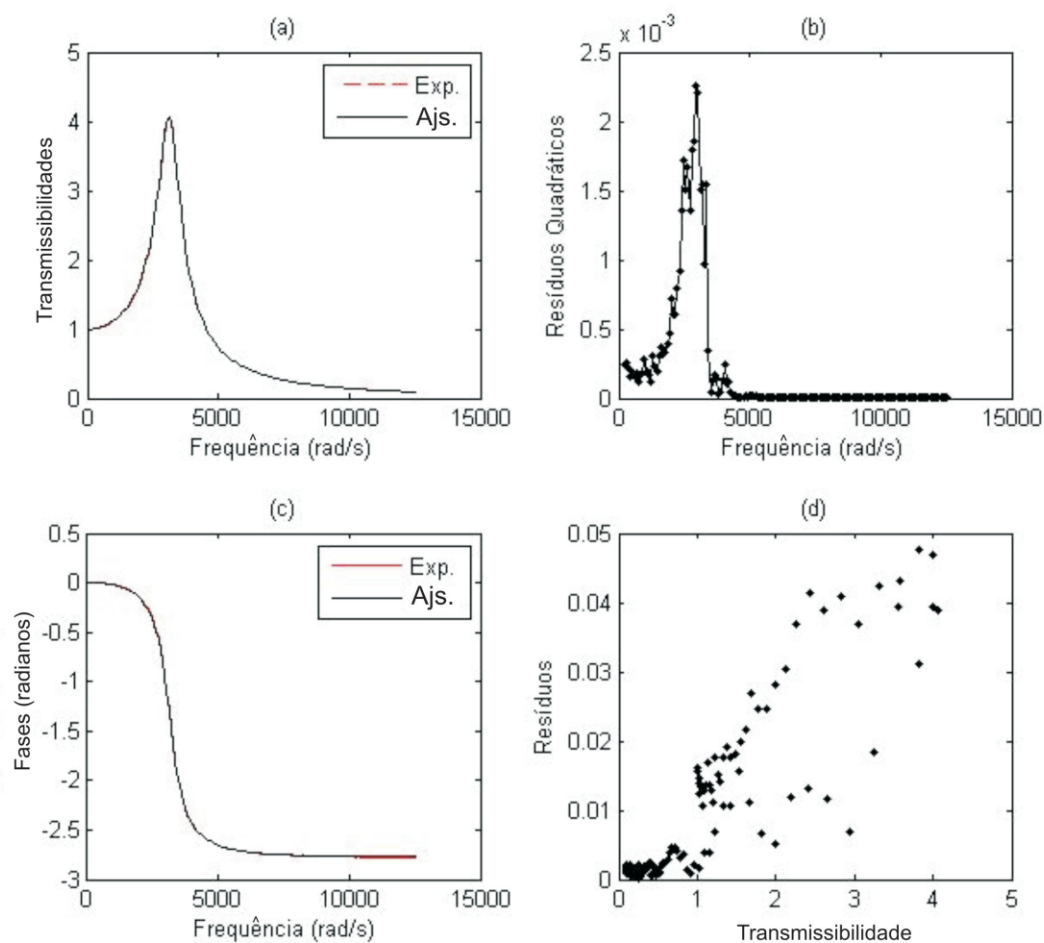


Figura 6.8 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTtransmissibilidade ajustada (módulo); 50°C - DF

Tabela 6.17 - Parâmetros DF 60,2°C

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b (s^β)
$4,7177 \cdot 10^6$	$5,4096 \cdot 10^8$	$4,4443 \cdot 10^{-1}$	$1,1587 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.18 - Índices DF 60,2°C

SSE	SST	R^2
0,089541	261,3669	0,99966

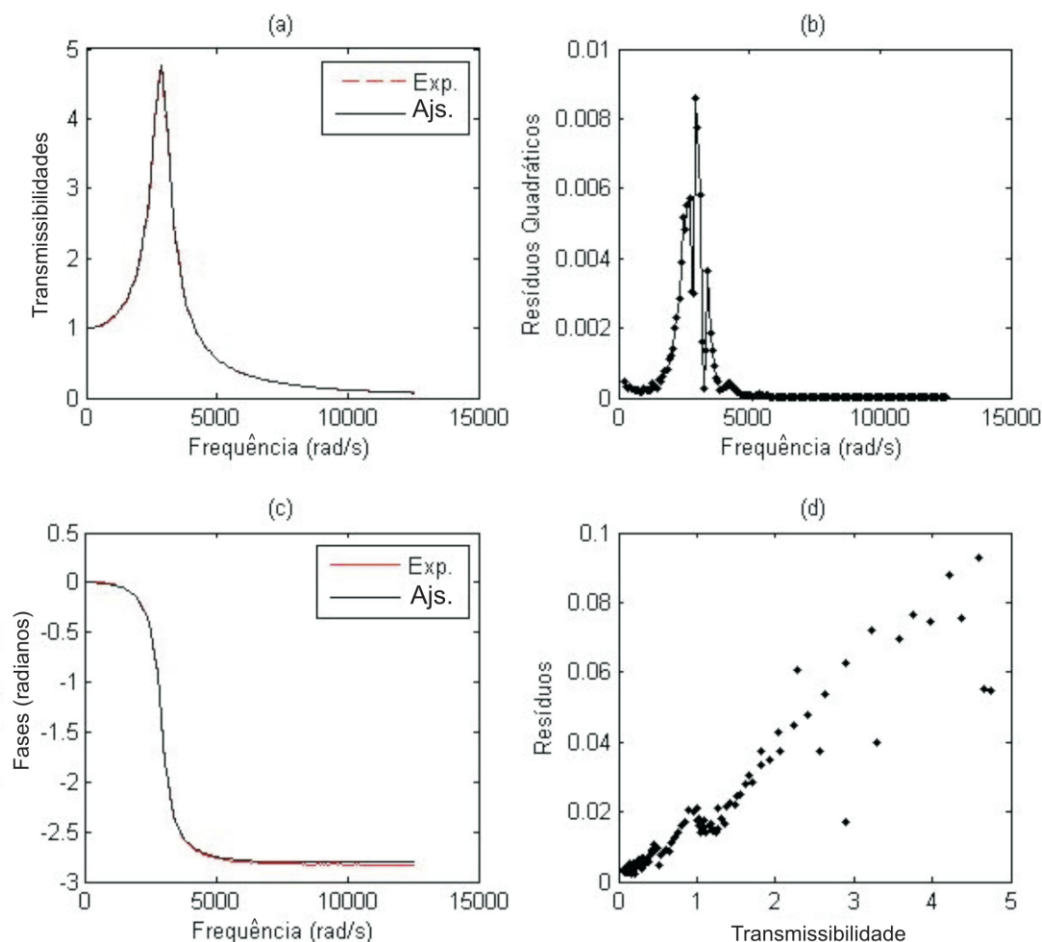


Figura 6.9 - (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) Resíduos X Transmissibilidade ajustada (módulo); 60,2°C - DF

Observa-se, nos resultados acima, que as ótimas impressões visuais dos ajustes estão em plena concordância com os elevados valores do coeficiente R^2 . Já os gráficos de resíduos não permitem, a princípio, nenhuma observação mais incisiva e geral. No tocante aos valores dos parâmetros, verifica-se que G_0 variou de $3,26 \cdot 10^5$ Pa (-18,3°C) a $9,47 \cdot 10^6$ Pa (0,3°C), G_1 de $2,41 \cdot 10^8$ Pa (50°C) a $3,74 \cdot 10^9$ Pa (9,8°C), β de $4,34 \cdot 10^{-1}$ (50°C) a $5,07 \cdot 10^{-1}$ (0,3°C) e b de $6,00 \cdot 10^{-5} s^\beta$ (20°C) a $1,78 \cdot 10^{-3} s^\beta$ (-18,3°C). Em termos de ordem de grandeza, a variação mais apreciável foi, portanto, a do parâmetro b .

6.2.2 Modelo GHM

Os limites inferiores (L_i) e superiores (L_s) empregados para os parâmetros dos três tipos de modelo GHM foram

a) GHM padrão com três termos:

$$L_i = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$L_s = [10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15]$$

b) GHM padrão com um termo

$$L_i = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$L_s = [10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15]$$

c) GHM alternativo com três termos

$$L_i = [1 \ -10 \ 1 \ 1 \ 1 \ -10 \ 1 \ 1 \ 1 \ -10 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$L_s = [10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15]$$

d) GHM alternativo com um termo

$$L_i = [1 \ -10 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$L_s = [10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15 \ 15]$$

e) GHM restringido com três termos

$$L_i = [0,01 \ 1 \ 1 \ 0,001 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$L_s = [100 \ 100 \ 10 \ 1 \ 100 \ 10 \ 100 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10]$$

f) GHM restringido com um termo

$$L_i = [0,01 \ 1 \ 1 \ 0,001 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$L_s = [100 \ 100 \ 10 \ 1 \ 10 \ 10 \ 10]$$

Os resultados obtidos para todos os tipos de modelo GHM e seus diferentes números de termos foram muito semelhantes entre si. Entendeu-se, assim, que a utilização de apenas um tipo não traria malefícios significativos do ponto de vista da presente comparação. Portanto, fez-se a escolha do modelo GHM restringido como aquele a ser utilizado doravante. Essa escolha se deu devido ao fato de que este modelo apresenta menos parâmetros a serem

ajustados, folgando o algoritmo de ajuste, de modo que, quando necessário, se possa fazer a adição de termos GHM em uma maior quantidade, frente aos outros dois modelos.

6.2.2.1 Um Termo GHM

Para as temperaturas de $-18,3^{\circ}\text{C}$ a $60,2^{\circ}\text{C}$, são apresentados, a seguir, os resultados obtidos para o modelo GHM restringido com um termo. Esses resultados encontram-se, pela ordem, nas tabelas 6.19 a 6.36 e nas figuras 6.10 a 6.18.

Tabela 6.19 – Parâmetros GHM 1 termo $-18,3^{\circ}\text{C}$

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}$ (Pa)	$\hat{\beta}$ (s^{-1})	u
$7,5536 \cdot 10^7$	$2,3773 \cdot 10^8$	$8,0659 \cdot 10^5$	$1,461 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.20 – Índices GHM 1 termo $-18,3^{\circ}\text{C}$

SSE	SST	R^2
0,10682	14,9305	0,99285

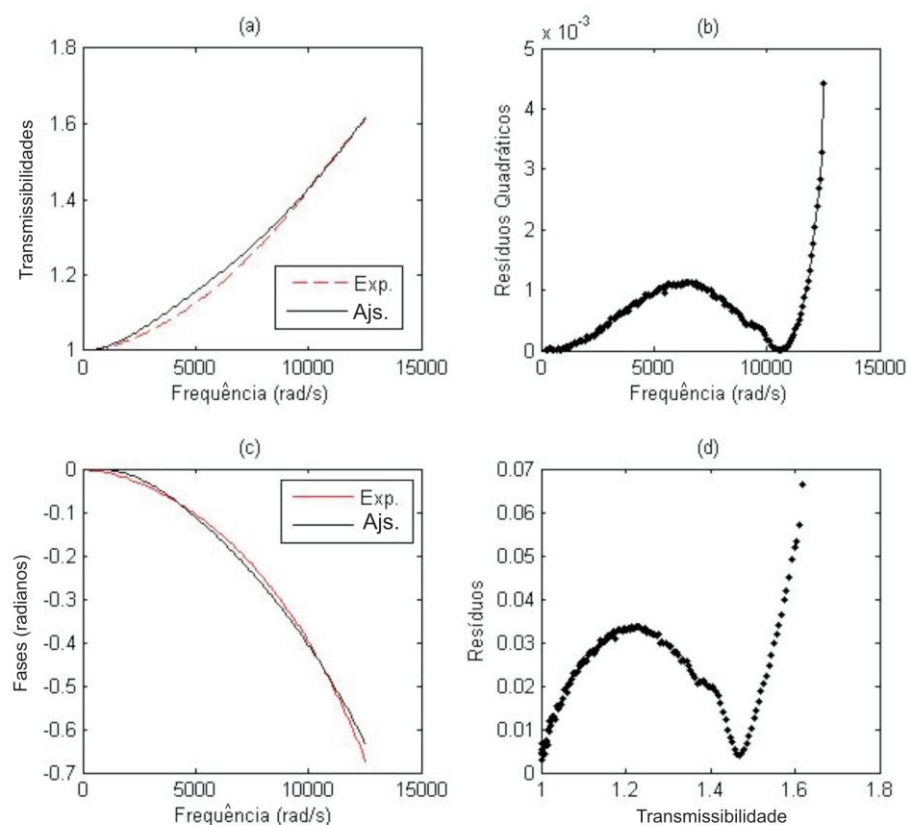


Figura 6.10 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); -18,3°C – GHM 1 termo

Tabela 6.21 – Parâmetros GHM 1 termo -10°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}$ (Pa)	$\hat{\beta}$ (s^{-1})	u
$4,6201 \cdot 10^7$	$1,5383 \cdot 10^8$	$5,0600 \cdot 10^5$	$1,946 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.22 – Índices GHM 1 termo -10°C

SSE	SST	R^2
0,36383	49,7533	0,99269

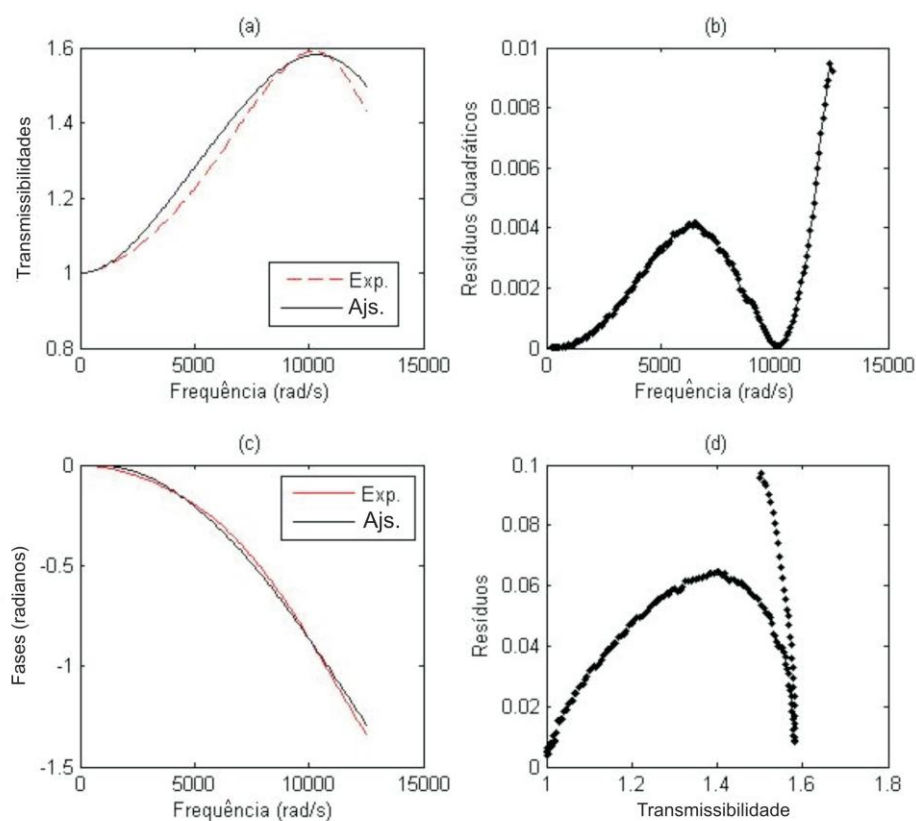


Figura 6.11 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); -10°C – GHM 1 termo

Tabela 6.23 – Parâmetros GHM 1 termo 0,3°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}$ (Pa)	$\hat{\beta}$ (s^{-1})	u
$3,0152 \cdot 10^7$	$7,6984 \cdot 10^7$	$7,0169 \cdot 10^4$	$5,080 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.24 – Índices GHM 1 termo 0,3°C

SSE	SST	R^2
0,75475	101,1975	0,99254

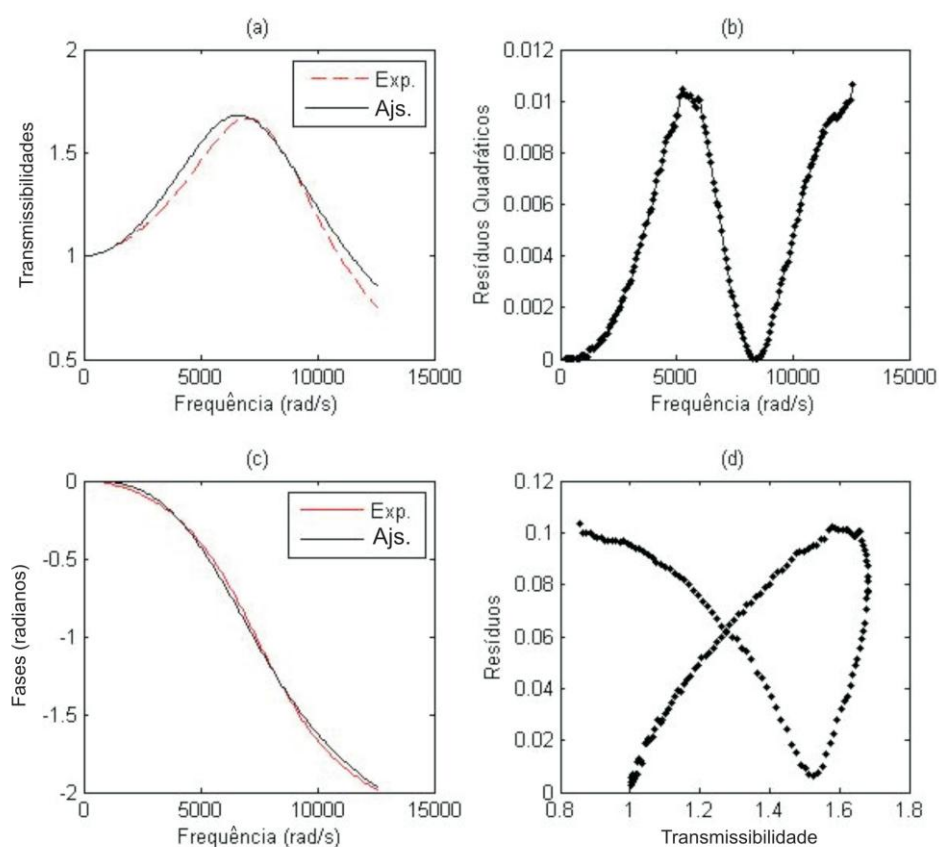


Figura 6.12 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) Resíduos X Transmissibilidade ajustada (módulo); 0,3°C – GHM 1 termo

Tabela 6.25 – Parâmetros GHM 1 termo 9,8°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}$ (Pa)	$\hat{\beta}$ (s^{-1})	u
$1,7991 \cdot 10^7$	$4,4735 \cdot 10^7$	$1,3455 \cdot 10^8$	$1,080 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6.26 – Índices GHM 1 termo 9,8°C

SSE	SST	R^2
0,84740	135,2603	0,99374

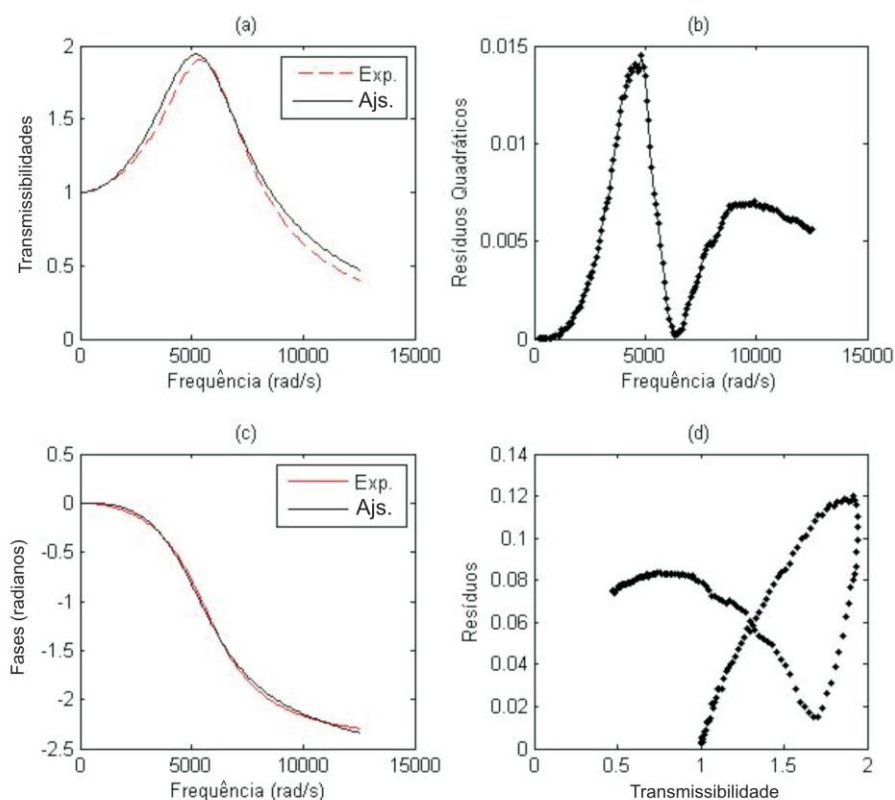


Figura 6.13 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTtransmissibilidade ajustada (módulo); 9,8°C – GHM 1 termo

Tabela 6.27 – Parâmetros GHM 1 termo 20°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}$ (Pa)	$\hat{\beta}$ (s^{-1})	u
$1,3276 \cdot 10^7$	$2,4353 \cdot 10^7$	$8,6603 \cdot 10^7$	$1,200 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6.28 – Índices GHm 1 termo 20°C

SSE	SST	R^2
0,72348	162,2893	0,99554

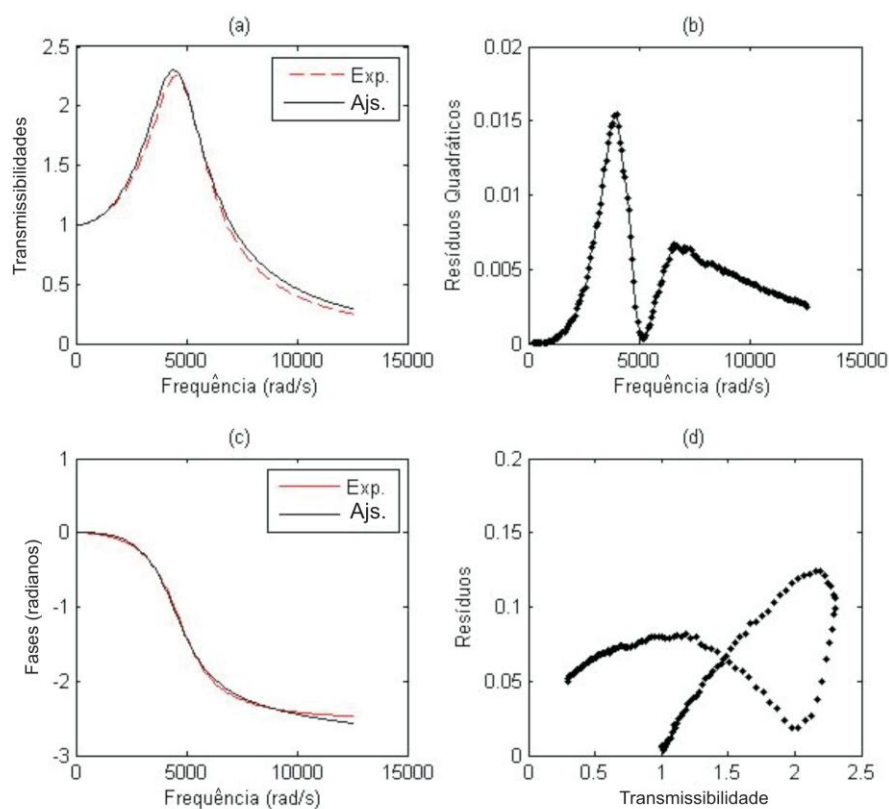


Figura 6.14 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 20°C – GHM 1 termo

Tabela 6.29 – Parâmetros GHM 1 termo 30°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}$ (Pa)	$\hat{\beta}$ (s^{-1})	u
$1,0309 \cdot 10^7$	$1,3656 \cdot 10^7$	$3,4644 \cdot 10^8$	$5,400 \cdot 10^{-3}$

Tabela 6.30 – Índices GHM 1 termo 30°C

SSE	SST	R^2
0,5479	190,8724	0,99713

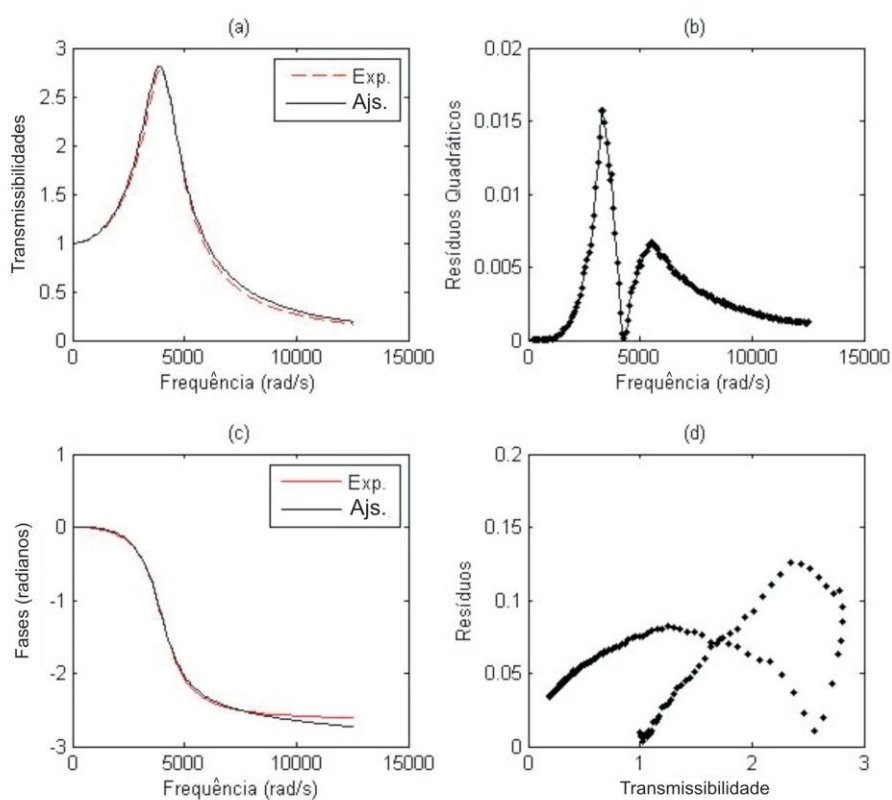


Figura 6.15 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 30°C – GHM 1 termo

Tabela 6.31 – Parâmetros GHM 1 termo 39,9°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}$ (Pa)	$\hat{\beta}$ (s^{-1})	u
$8,1868 \cdot 10^6$	$8,1204 \cdot 10^6$	$2,2416 \cdot 10^6$	$6,130 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6.32 – Índices GHM 1 termo 39,9°C

SSE	SST	R^2
0,39871	216,5685	0,99816

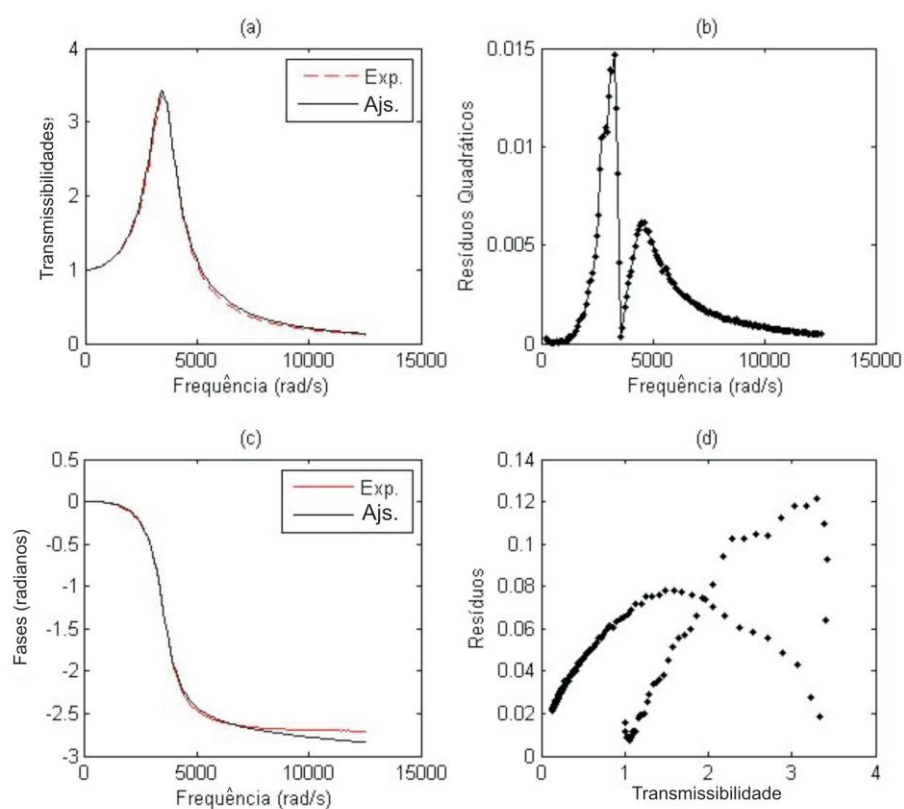


Figura 6.16 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 39,9°C –GHM 1 termo

Tabela 6.33 – Parâmetros GHM 1 termo 50°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}$ (Pa)	$\hat{\beta}$ (s^{-1})	u
$6,6978 \cdot 10^6$	$5,1809 \cdot 10^6$	$8,2890 \cdot 10^5$	$9,320 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6.34 – Índices GHM 1 termo 50°C

SSE	SST	R^2
0,31891	239,4428	0,99867

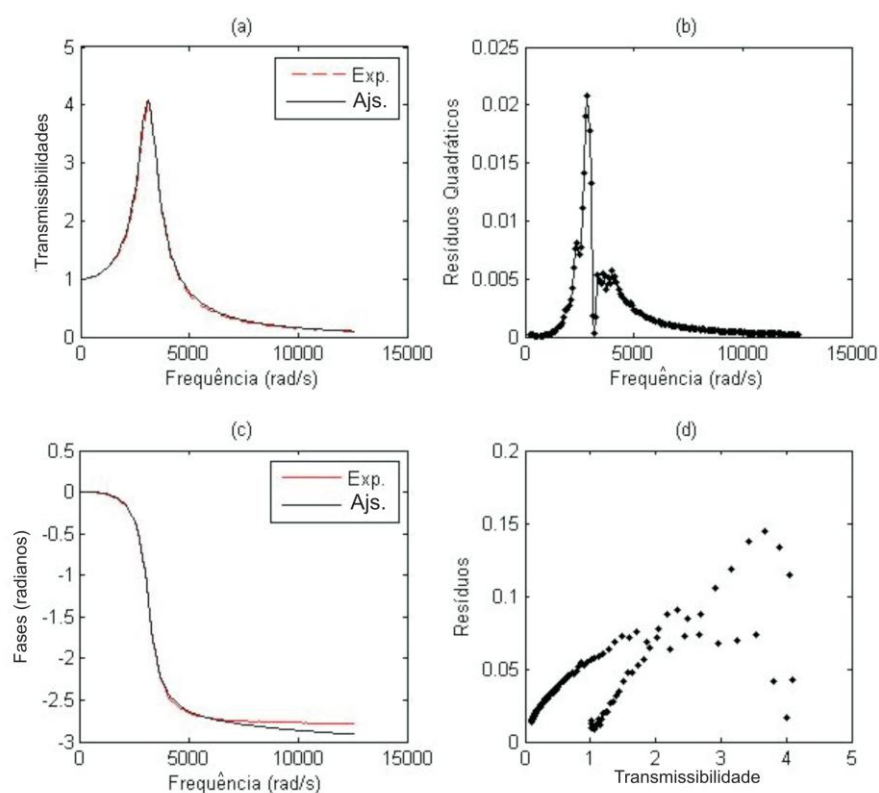


Figura 6.17 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 50°C – GHM 1 termo

Tabela 6.35 – Parâmetros GHM 1 termo 60,2°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}$ (Pa)	$\hat{\beta}$ (s^{-1})	u
$5,7746 \cdot 10^6$	$3,4352 \cdot 10^6$	$6,4117 \cdot 10^4$	$3.105 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.36 – Índices GHM 1 termo 60,2°C

SSE	SST	R^2
0,29775	261,3669	0,99886

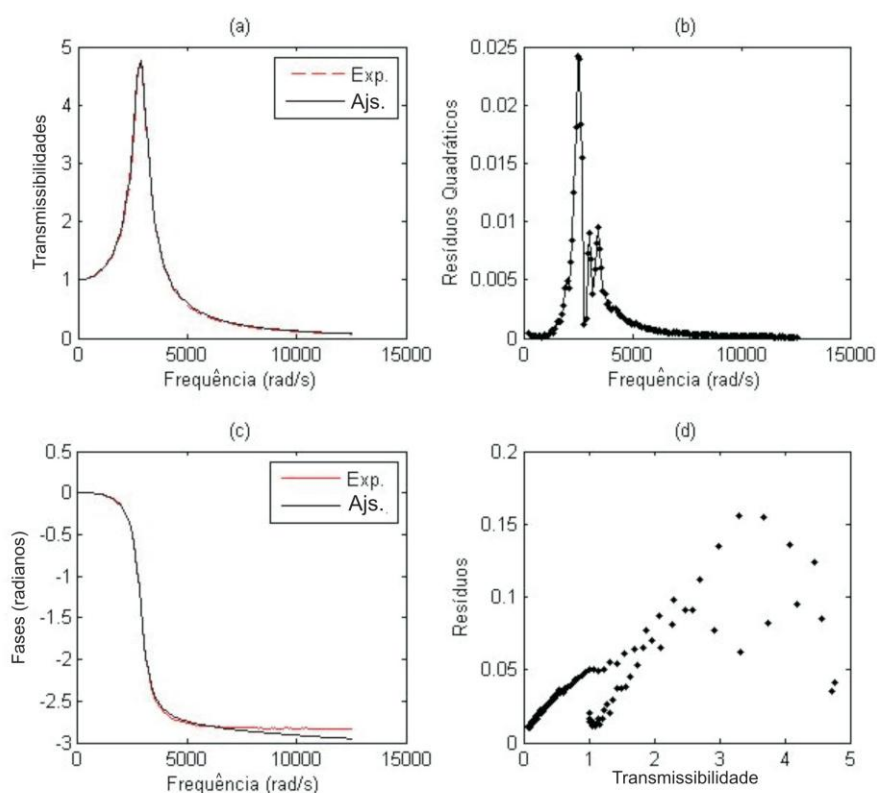


Figura 6.18 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 60,2°C – GHM 1 termo

Nos resultados anteriores, observa-se que a queda geral na impressão visual dos ajustes é acompanhada por alteração na terceira casa decimal do coeficiente R^2 . Os gráficos de resíduos quadráticos por frequência apresentam algumas evidências de relação não linear (harmônica). Quanto aos valores dos parâmetros, verifica-se a seguinte variação: G_0 de $5,7 \cdot 10^6$ Pa (60,2°C) a $7,55 \cdot 10^7$ Pa (-18,3°C), $\hat{\alpha}$ de $3,44 \cdot 10^6$ Pa (60,2°C) a $2,38 \cdot 10^8$ Pa (-18,3°C), $\hat{\beta}$ de $6,41 \cdot 10^4$ s⁻¹ (60,2°C) a $3,46 \cdot 10^8$ s⁻¹ (30°C) e u de $5,400 \cdot 10^{-3}$ (30°C) a $5,080 \cdot 10^{-1}$. Os parâmetros G_0 e $\hat{\alpha}$ decrescem com o aumento da temperatura. Em termos de ordem de grandeza a variação mais expressiva é a de $\hat{\beta}$.

6.2.2.2 Três Termos GHM

Os resultados alcançados com o modelo GHM restringido com três termos, para as temperaturas de $-18,3^{\circ}\text{C}$ a $60,2^{\circ}\text{C}$, são apresentados, a seguir, pela ordem, nas tabelas 6.37 a 6.54 e nas figuras 6.19 a 6.27.

Tabela 6.37 – Parâmetros GHM 3 termos $-18,3^{\circ}\text{C}$

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s^{-1})	r	u
$4,6047 \cdot 10^7$	$7,9355 \cdot 10^7$	$2,9417 \cdot 10^8$	$1,0231 \cdot 10^7$	$3,7587 \cdot 10^4$	9,4348	$3,318 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.38 – Índices GHM 3 termos $-18,3^{\circ}\text{C}$

SSE	SST	R^2
0,0029449	14,9305	0,99980

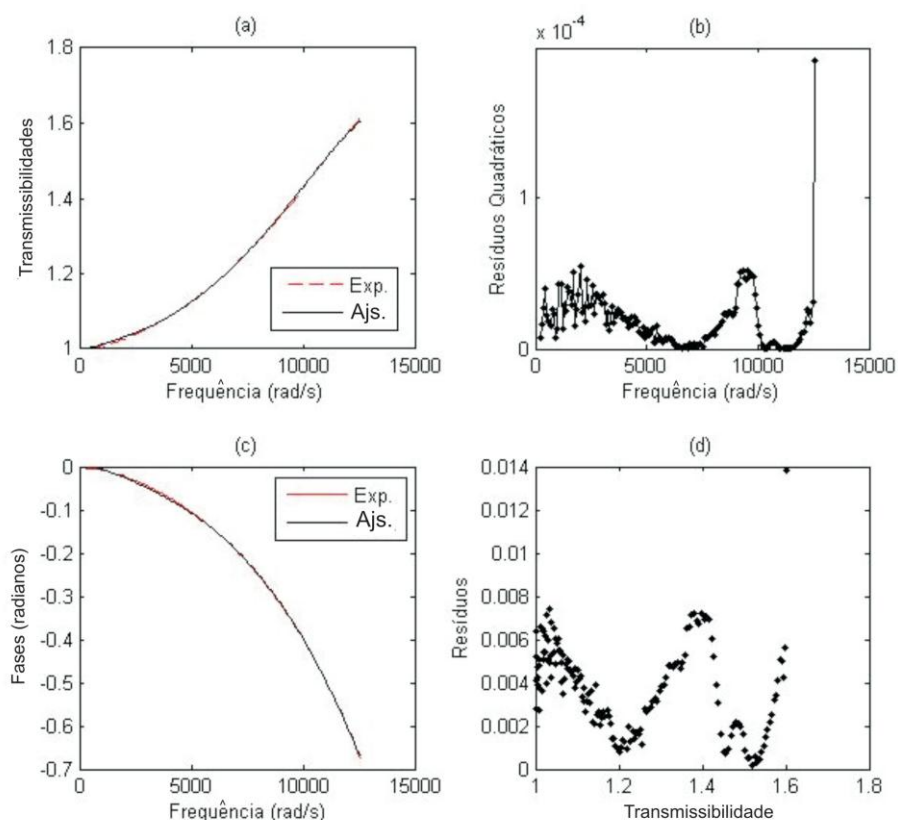


Figura 6.19 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); $-18,3^{\circ}\text{C}$ – GHM 3 termos

Tabela 6.39 – Parâmetros GHM 3 termos -10°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u
$1,6955 \cdot 10^7$	$3,6468 \cdot 10^7$	$4,9133 \cdot 10^7$	$2,3936 \cdot 10^8$	$4,9278 \cdot 10^4$	6,3430	$1,922 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.40 – Índices GHM 3 termos -10°C

SSE	SST	R ²
0,0030923	49,7533	0,99994

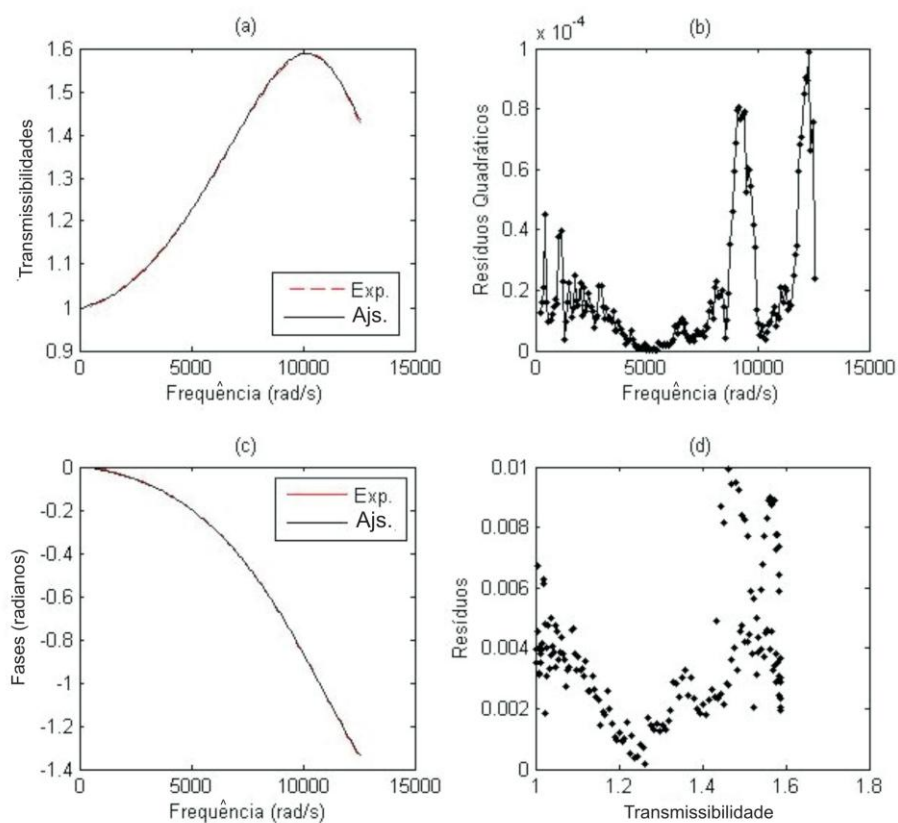


Figura 6.20 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTtransmissibilidade ajustada (módulo); -10°C – GHM 3 termos

Tabela 6.41 – Parâmetros GHM 3 termos 0,3°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u
$3,9156 \cdot 10^7$	$1,6789 \cdot 10^5$	$6,3637 \cdot 10^8$	$1,7310 \cdot 10^6$	$4,1276 \cdot 10^7$	1,0762	$6,110 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6.42 – Índices GHM 3 termos 0,3°C

SSE	SST	R ²
0,012027	101,1975	0,99988

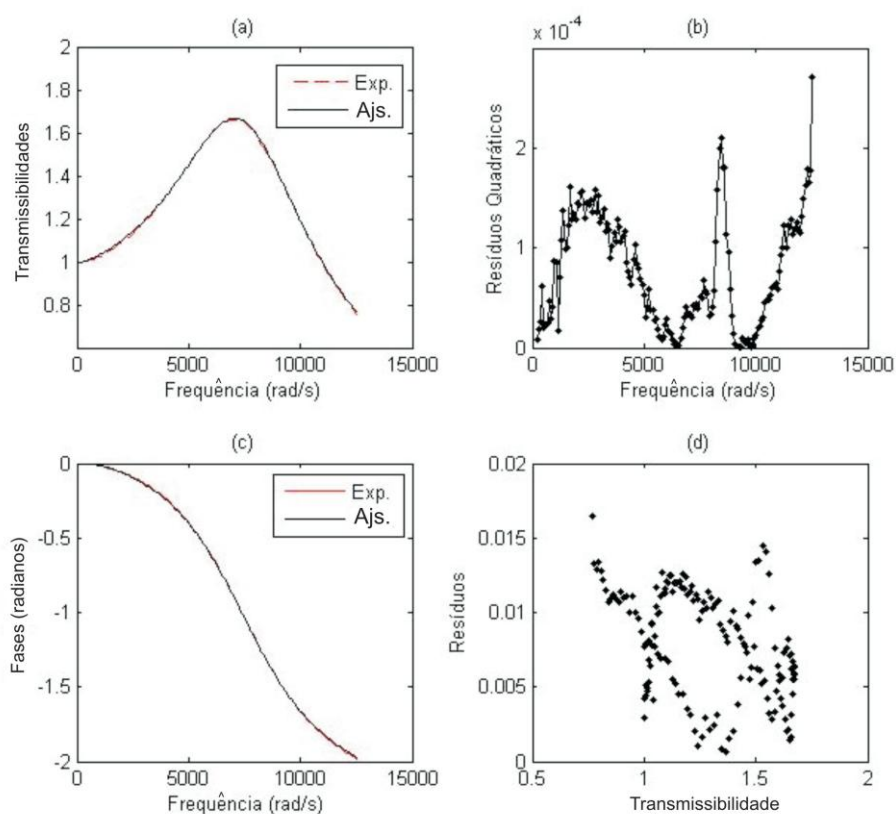


Figura 6.21 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 0,3°C – GHM 3 termos

Tabela 6.43 – Parâmetros GHM 3 termos 9,8°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u
$1,3960 \cdot 10^7$	$1,0908 \cdot 10^7$	$5,9229 \cdot 10^7$	$6,6817 \cdot 10^2$	$9,5191 \cdot 10^4$	10,000	$1,901 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.44 – Índices GHM 3 termos 9,8°C

SSE	SST	R ²
0,02111	135,2603	0,99984

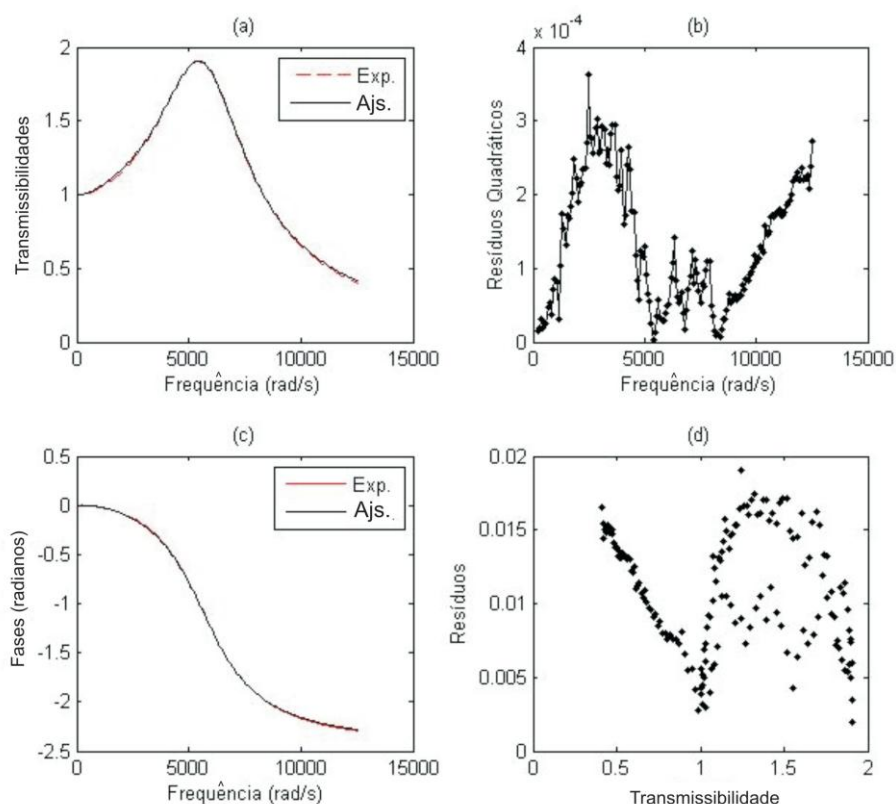


Figura 6.22 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTtransmissibilidade ajustada (módulo); 9,8°C - GHM 3 termos

Tabela 6.45 – Parâmetros GHM 3 termos 20°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u
$1,0861 \cdot 10^7$	$5,8571 \cdot 10^6$	$1,0663 \cdot 10^0$	$3,4621 \cdot 10^7$	$2,1886 \cdot 10^4$	3,4399	$3,420 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.46 – Índices GHM 3 termos 20°C

SSE	SST	R ²
0,014432	162,2893	0,99991

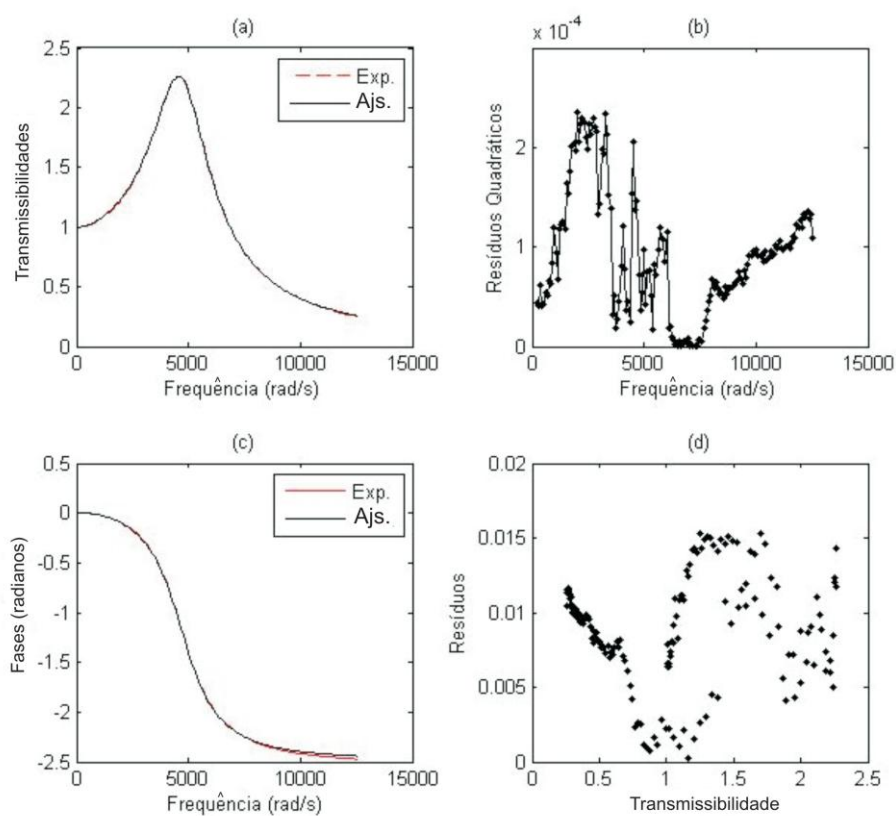


Figura 6.23 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 20°C – GHM 3 termos

Tabela 6.47 – Parâmetros GHM 3 termos 30°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u
$8,7925 \cdot 10^6$	$3,4889 \cdot 10^6$	$3,6916 \cdot 10^5$	$1,8941 \cdot 10^7$	$2,0169 \cdot 10^4$	3,4937	$3,210 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.48 – Índices GHM 3 termos 30°C

SSE	SST	R ²
0,015319	190,8724	0,99992

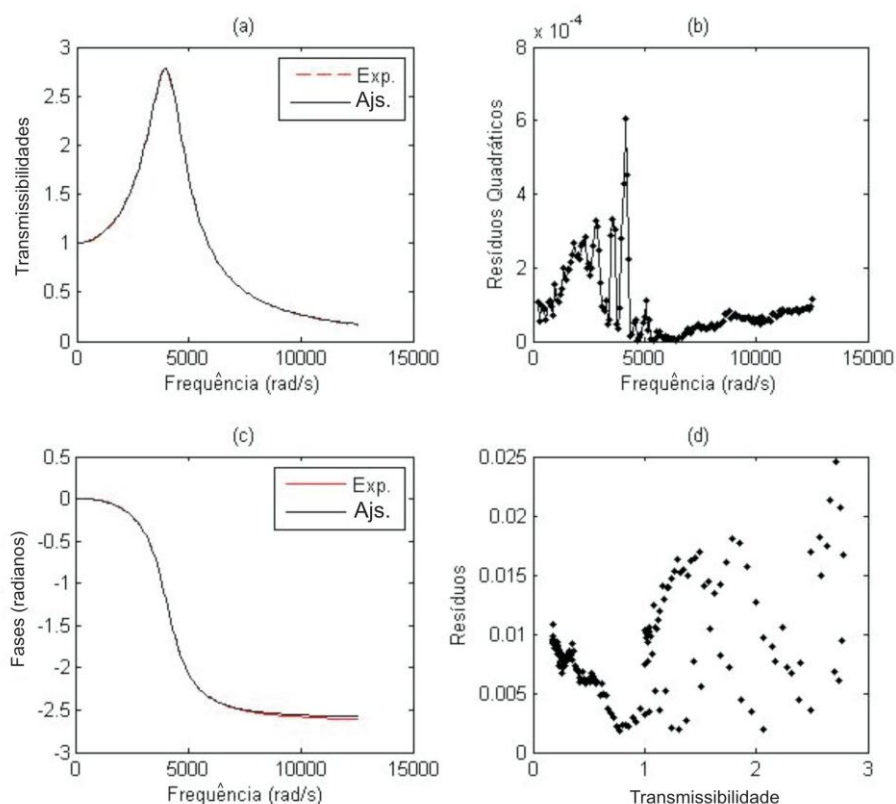


Figura 6.24 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTtransmissibilidade ajustada (módulo); 30°C – GHM 3 termos

Tabela 6.49 – Parâmetros GHM 3 termos 39,9 °C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u
$5,6605 \cdot 10^6$	$2,9468 \cdot 10^6$	$2,9675 \cdot 10^6$	$1,8490 \cdot 10^7$	$3,3679 \cdot 10^4$	10,000	$1,319 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.50 – Índices GHM 3 termos 39,9°C

SSE	SST	R ²
0,0094689	216,5685	0,99996

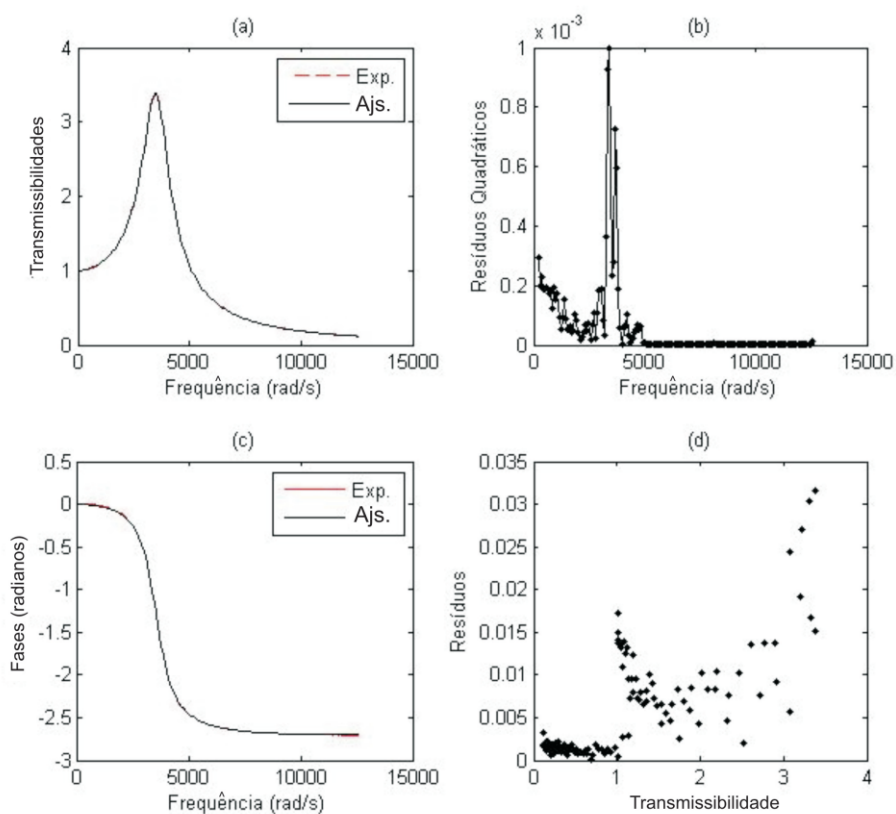


Figura 6.25 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTtransmissibilidade ajustada (módulo); 39,9°C – GHM 3 termos

Tabela 6.51 – Parâmetros GHM 3 termos 50°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u
5,0037.10 ⁶	1,9817.10 ⁶	7,7912.10 ⁵	6,4004.10 ⁶	1,9762.10 ⁵	5,3445	5,420.10 ⁻²

Tabela 6.52 – Índices GHM 3 termos 50°C

SSE	SST	R ²
0,027484	239,4428	0,99989

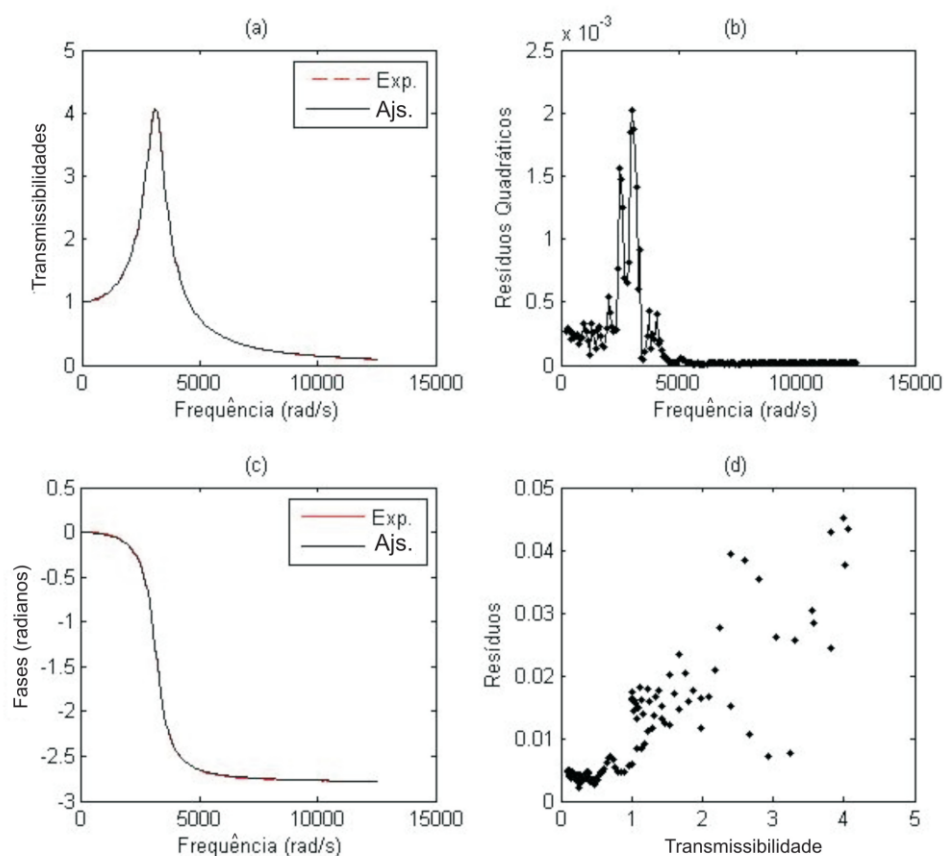


Figura 6.26 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); 50°C – GHM 3 termos

Tabela 6.53 – Parâmetros GHM 3 termos 60,2°C

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u
4,7171.10 ⁶	1,2668.10 ⁶	1,7048.10 ⁶	8,4231.10 ⁶	9,4890.10 ³	10,000	2,467.10 ⁻¹

Tabela 6.54 – Índices GHM 3 termos 60,2°C

SSE	SST	R ²
0,076553	261,3669	0,99971

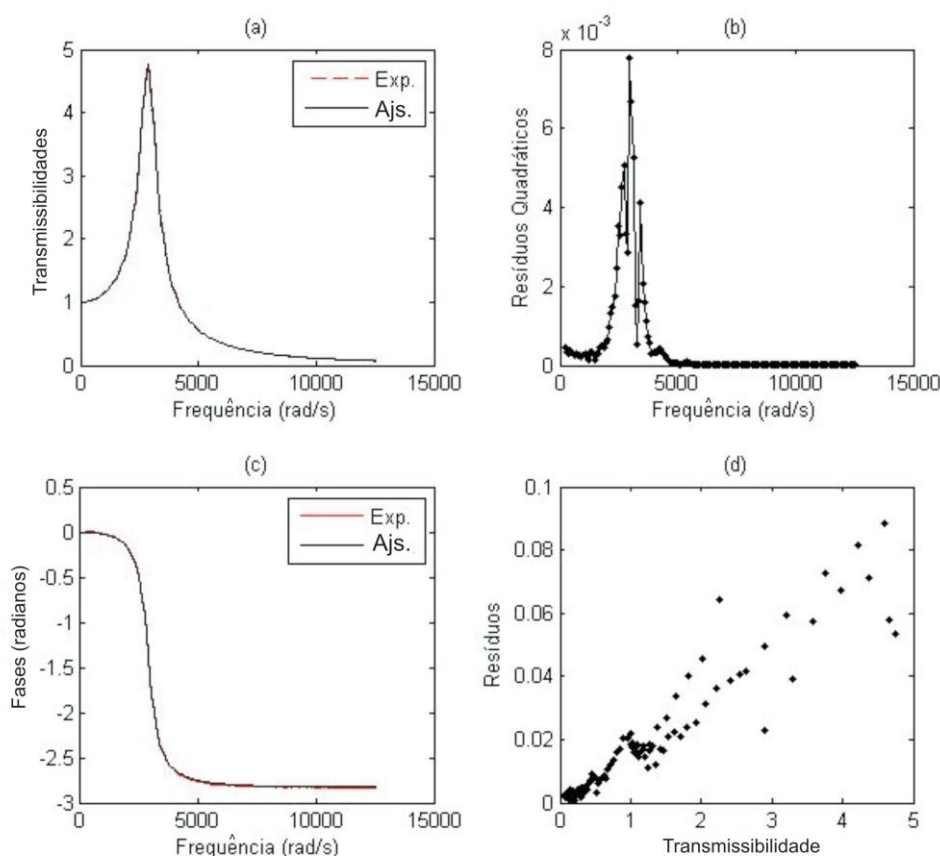


Figura 6.27 – (a) Transmissibilidades (módulos), (b) Resíduos quadráticos, (c) Transmissibilidades (fases), (d) Resíduos X Transmissibilidade ajustada (módulo); 60,2°C – GHM 3 termos

Nesse caso, a impressão visual dos ajustes e sua concordância com o coeficiente R^2 são muito semelhantes ao observado para o modelo de DF. Também os resíduos não permitem nenhuma constatação mais firme de algum comportamento sistemático. Quanto aos valores dos parâmetros, observa-se que ocorre uma variação dos mesmos, quais sejam, G_0 de $4,7171 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ (60,2°C) a $4,6047 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ (-18,3°C), $\hat{\alpha}_1$ de $1,6789 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ (0,3°C) a $7,9355 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ (-18,3°C), $\hat{\alpha}_2$ de $1,0663 \cdot 10^0 \text{ Pa}$ (20°C) a $6,3637 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ (0,3°C), $\hat{\alpha}_3$ de $6,6817 \cdot 10^2 \text{ Pa}$ (9,8°C) a $2,3936 \cdot 10^8 \text{ Pa}$ (-10°C), $\hat{\beta}_1$ de $9,4890 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ (60,2°C) a $4,1276 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ (0,3°C), r de 1,0762 (0,3) a 10,000 (9,8°C, 39,9°C, 60,2°C) e u de $5,420 \cdot 10^{-2}$ (50°C) a $3,420 \cdot 10^{-1}$ (20°C). Repara-se que os valores de $\hat{\alpha}_k$ possuem grandes variações em termos de ordem de grandeza. Pode-se observar também que r atinge o valor do limite superior para três temperaturas.

6.3 Resultados Obtidos Para Um Conjunto de Três Temperaturas

Como passo intermediário entre a caracterização dinâmica para uma só temperatura e a caracterização dinâmica integrada para um conjunto de nove temperaturas, foi considerada a caracterização dinâmica para um conjunto de três temperaturas, com espaçamento aproximadamente igual entre elas. As temperaturas escolhidas foram, então, $-18,3^{\circ}\text{C}$, 20°C e $60,2^{\circ}\text{C}$ (Temp1, Temp2 e Temp3, respectivamente). Na figura 6.28 pode ser observado, pelo wicket plot, que as temperaturas escolhidas estão tão distribuídas quanto possível com relação ao módulo real de cisalhamento.

Além de preparar para a caracterização dinâmica completa, visou-se, com este passo, verificar se um conjunto mínimo de dados em temperaturas bem espaçadas já seria suficiente para uma descrição satisfatória do comportamento material.

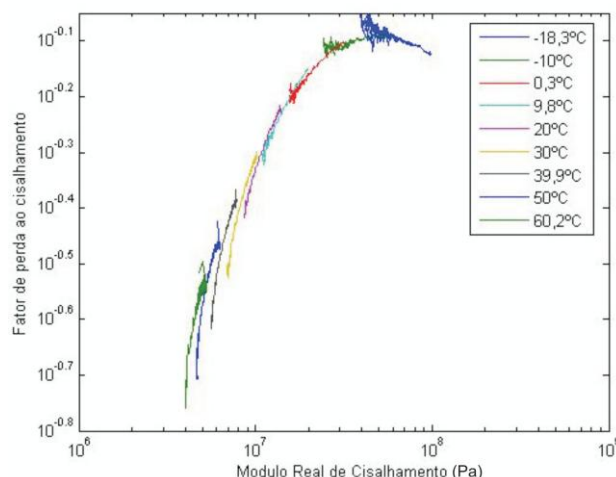


Figura 6.28 – Wicket plot - borracha butílica

6.3.1 Modelo de DF

Para o modelo de derivadas fracionárias, os limites inferiores e superiores utilizados foram $\text{Li}=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 6 \ 8 \ -5 \ -8 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ \min(\text{Temp})]$ e $\text{Ls}=[10 \ 10 \ 9 \ 10 \ 7 \ 10 \ 0 \ 0 \ 10 \ 1 \ 10 \ 3 \ \max(\text{Temp})]$, respectivamente. Os últimos cinco valores de Li e Ls referem-se aos parâmetros θ_1 e sua ordem de grandeza, θ_2 e sua ordem de grandeza e à temperatura de referência T_F (dada em Kelvin). Esses parâmetros dizem respeito à equação WLF, embutida na minimização. O parâmetro T_F é analisado com base em “Temp”, o valor de temperaturas escolhidos (também em Kelvin).

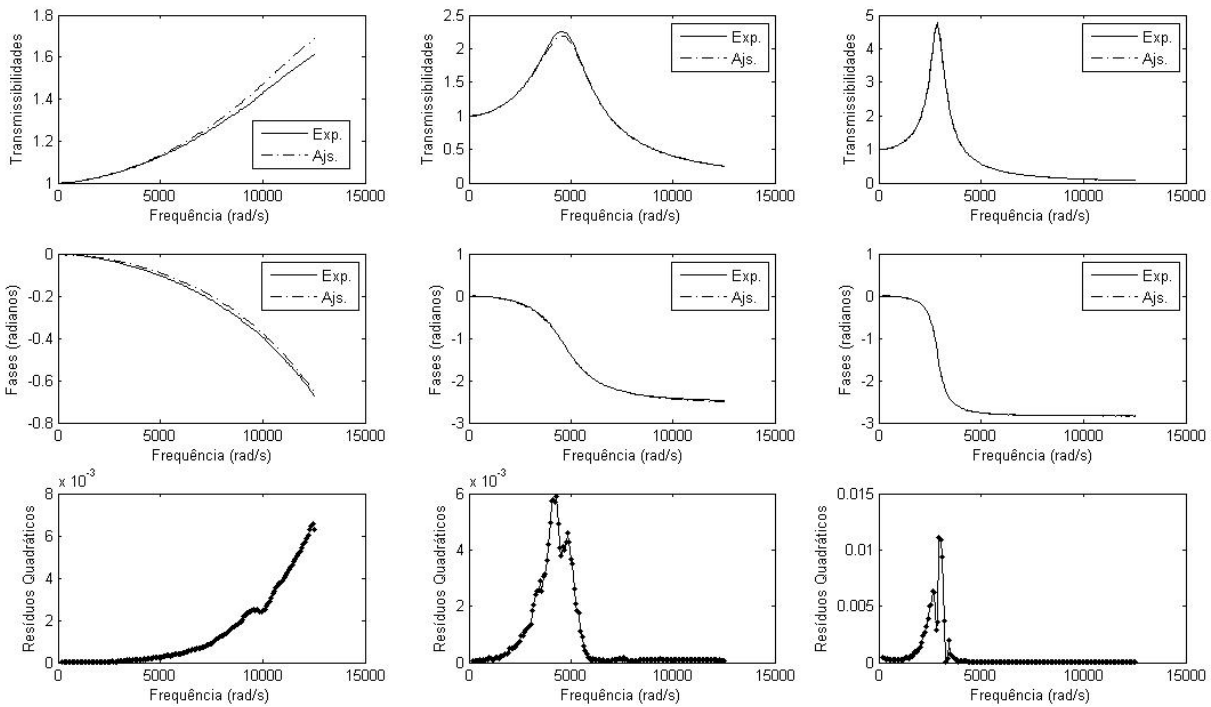
Os dados experimentais, obtidos nas três temperaturas escolhidas, conduzem aos parâmetros e curvas das tabelas 6.55 e 6.56 e figuras 6.29 a 6.31. Na figura 6.32 é apresentada a comparação entre o wicket plot experimental e o wicket plot obtido com os parâmetros do ajuste.

Tabela 6.55 – Parâmetros DF 3 temperaturas

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b_0 (s^β)	θ_1	θ_2	T_F (K)
$4,4250.10^6$	$2,0000.10^{10}$	$3,9160.10^{-1}$	$1,0757.10^{-4}$	14,3438	202,4647	260,2773

Tabela 6.56 – Índices DF 3 temperaturas

	SSE	SST	R^2
Temp1	0,22590	14,9305	0,98487
Temp2	0,13563	162,2893	0,99916
Temp3	0,09072	261,3669	0,99963
Total	0,44761	556,0161	0,99918



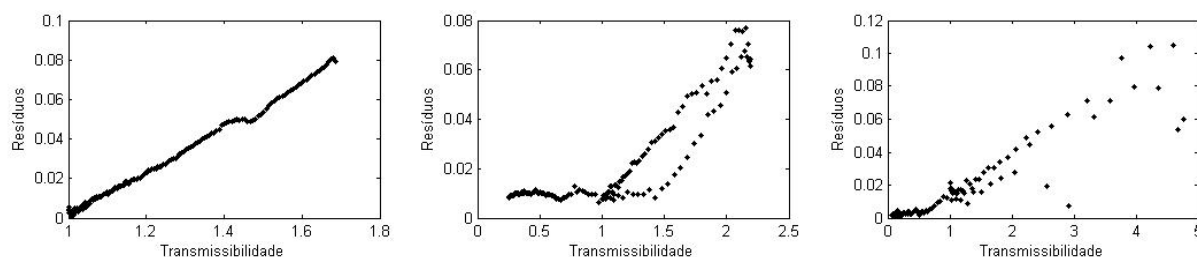


Figura 6.29 – Gráficos das transmissibilidades (módulos), Transmissibilidades (fases), Resíduos quadráticos, ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); DF 3 temperaturas

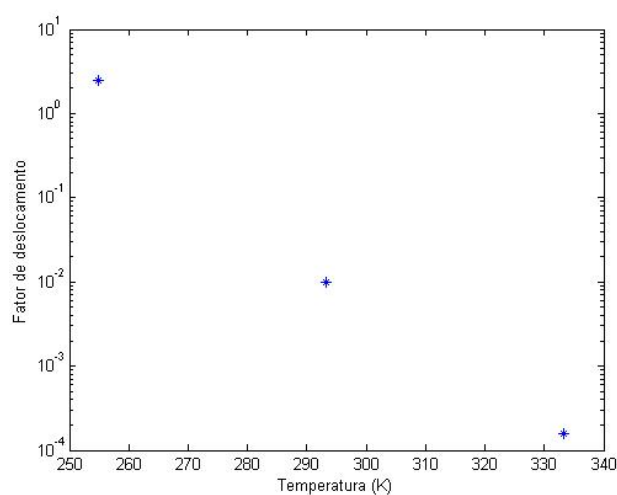


Figura 6.30 – Fator de deslocamento – DF 3 temperaturas

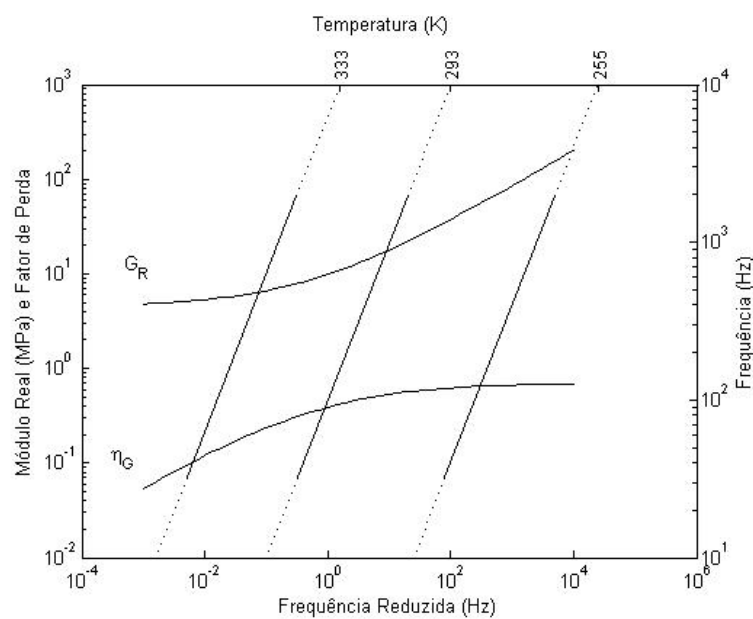


Figura 6.31 – Nomograma de frequências reduzidas – DF 3 temperaturas

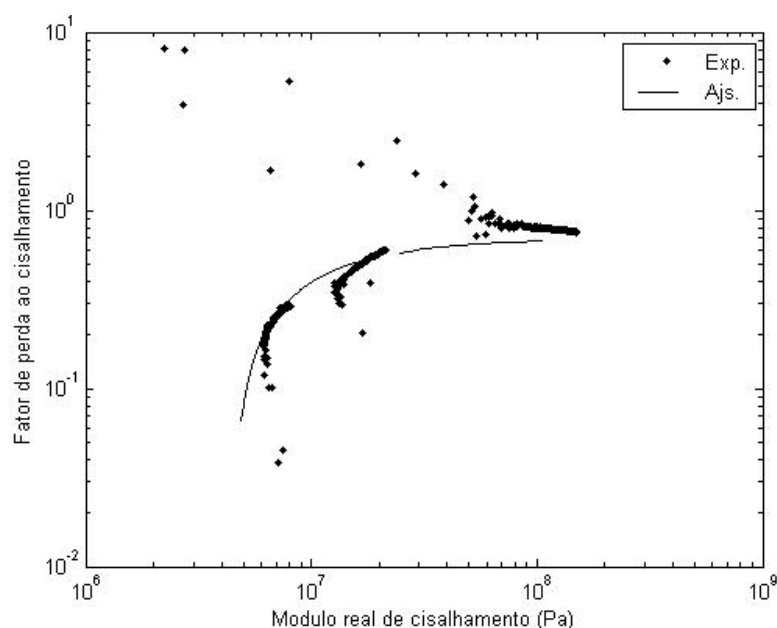


Figura 6.32 - Wicket plot experimental e ajustado – DF 3 temperaturas

Observa-se que os ajustes a 20°C e a 60,2°C se mostram apreciáveis, tanto visualmente, quanto pelo R^2 . Já a -18,3°C, ocorre alguma discrepância visual, corroborada pelo R^2 . Quanto aos resíduos, pode-se notar que se apresentam mais destacadamente em torno dos picos das curvas de transmissibilidade (módulo). O *wicket plot* obtido com os parâmetros ajustados mostra uma forma semelhante ao obtido através dos dados experimentais.

6.3.2 Modelo GHM

São apresentados, nesta seção, os resultados obtidos com o modelo GHM, utilizando-se três temperaturas. Inicialmente, para estabelecer uma igualdade quanto ao número de parâmetros com relação ao modelo DF, foi feito um ajuste com um termo GHM. Em seguida, foi feito um ajuste com três termos GHM, sendo este um número de termos bastante encontrado na literatura. Posteriormente, deu-se um salto considerável, fazendo um ajuste com sete termos GHM. Tentou-se, nesse último ajuste, obter uma melhora significativa de modo a encontrar um número de termos GHM para o qual esse modelo se equipararia, em resultados, ao modelo de DF.

6.3.2.1 Um Termo GHM

Para o modelo GHM de um termo apenas, os limites inferiores e superiores utilizados foram $Li = [1 \ 1 \ 1 \ 0.001 \ 5 \ 7 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ \min(\text{Temp})]$ e $Ls = [10 \ 10 \ 10 \ 1 \ 7 \ 10 \ 10 \ 10 \ 1 \ 10 \ 3 \ \max(\text{Temp})]$, respectivamente. Como no caso anterior, os últimos cinco valores de Li e Ls referem-se à θ_1 e sua ordem de grandeza, θ_2 e sua ordem de grandeza e à temperatura de referência, sendo “Temp” o vetor de temperaturas escolhidas.

Os dados experimentais, obtidos nas três temperaturas escolhidas, conduzem aos parâmetros e curvas das tabelas 6.57 e 6.58 e figuras de 6.33 a 6.36.

Tabela 6.57 – Parâmetros GHM 1 termo 3 temperaturas

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s^{-1})	u	θ_1	θ_2	T_F (K)
$6,4085 \cdot 10^6$	$2,0838 \cdot 10^8$	$1,1011 \cdot 10^9$	$8,200 \cdot 10^{-3}$	6,1218	277,9612	292,6387

Tabela 6.58 – Índices GHM 1 termo 3 temperaturas

	SSE	SST	R^2
Temp 1	0,65273	14,9305	0,95628
Temp2	71,2165	162,2893	0,56118
Temp3	1,2825	261,3669	0,99509
Total	73,1517	556,0161	0,86844

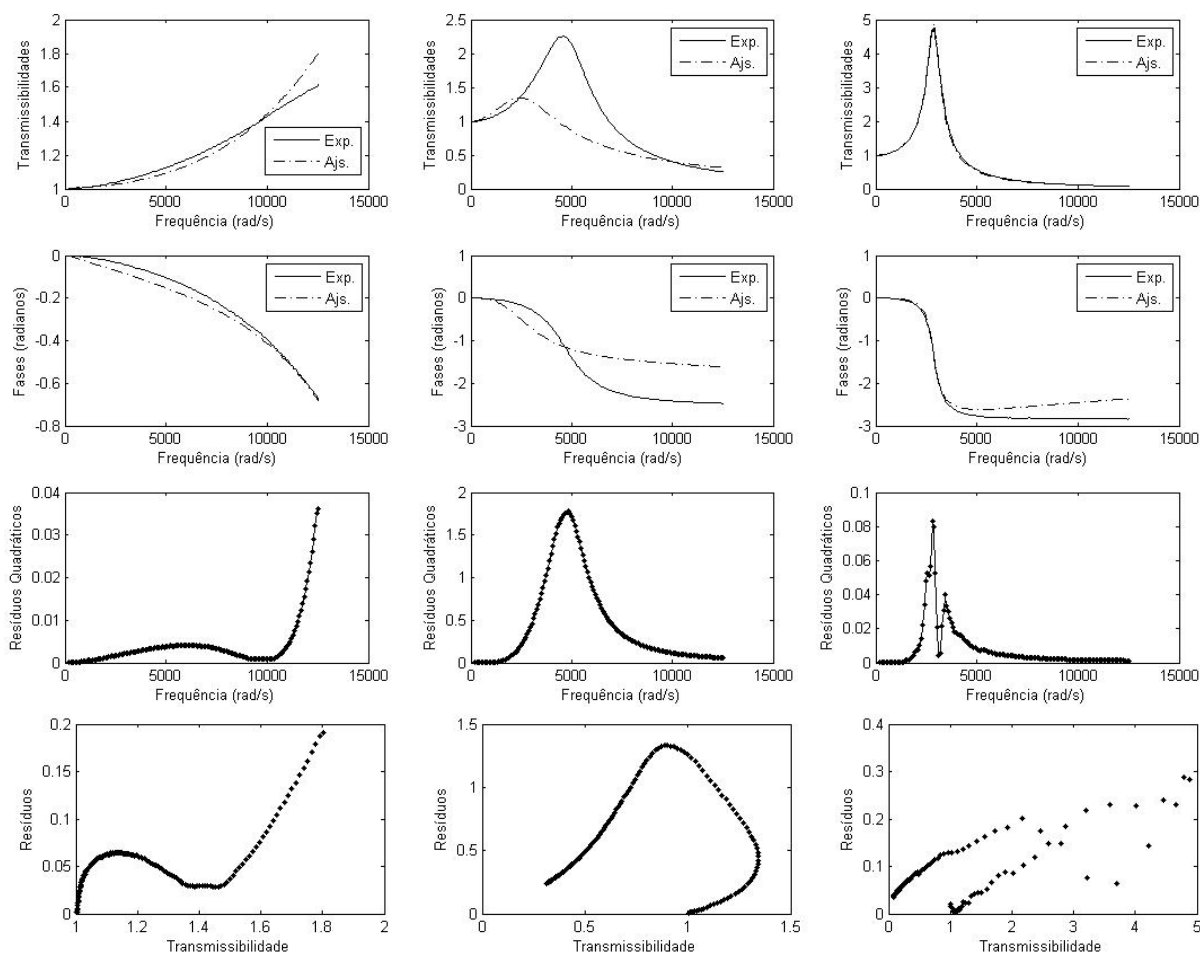


Figura 6.33 – Gráficos das transmissibilidades (módulos), Transmissibilidades (fases), Resíduos quadráticos, ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); GHM 1 termo 3 temperaturas

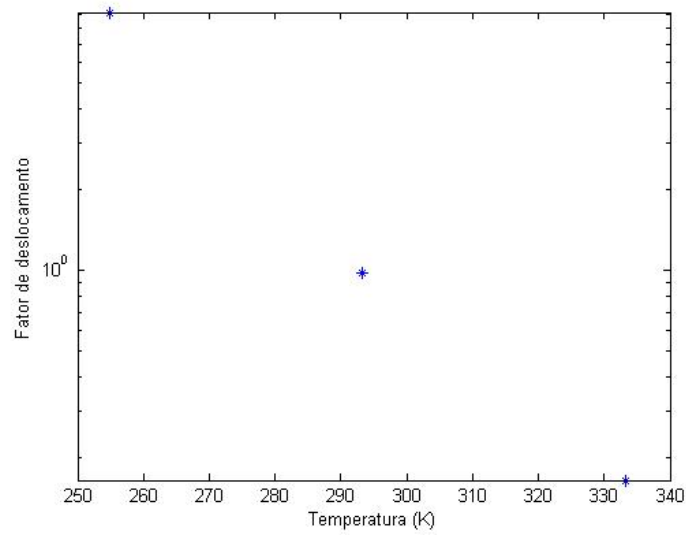


Figura 6.34 – Fator de deslocamento – GHM 1 termo 3 temperaturas

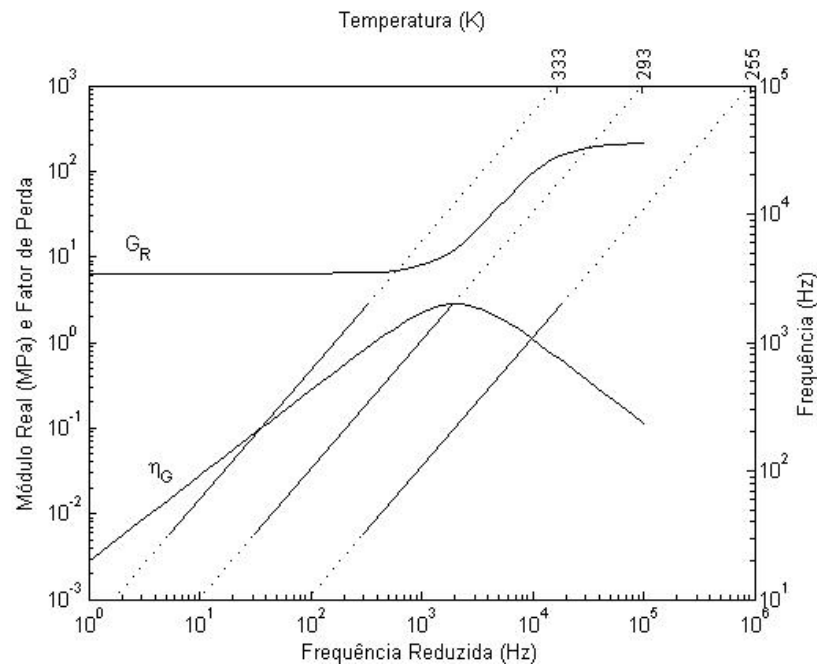


Figura 6.35 – Nomograma de frequência reduzida – GHM 1 termo 3 temperaturas

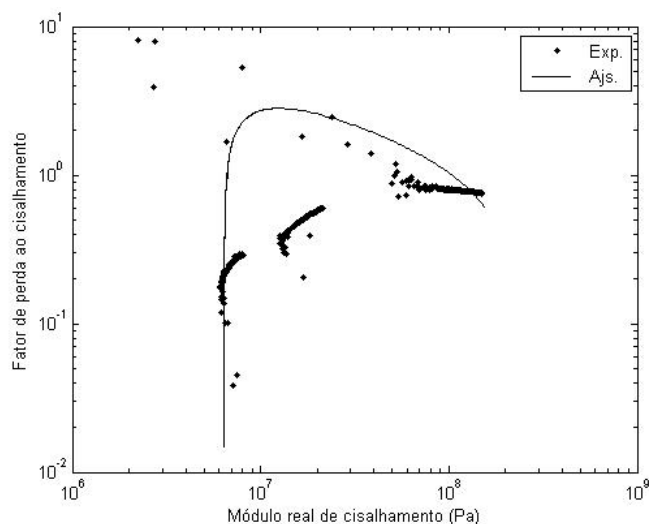


Figura 6.36 - Wicket plot experimental e ajustado – GHM 1 termo 3 temperaturas

Nesse ajuste os resultados deixam a desejar, particularmente na temperatura de 20°C, em que são bastante insatisfatórios. Os resíduos mantêm-se elevados no entorno do pico das transmissibilidades (módulo). Observa-se que o *wicket plot* obtido com os parâmetros ajustados se apresenta bastante deslocado com relação ao *wicket plot* experimental.

6.3.2.2 Três Termos GHM

No modelo GHM de três termos, foram utilizados os limites inferiores e superiores: $Li = [1 \ 1 \ 1 \ 0.001 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ \min(\text{Temp})]$ e $Ls = [10 \ 100 \ 10 \ 1 \ 100 \ 10 \ 100 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 7 \ 10 \ 1 \ 10 \ 3 \ \max(\text{Temp})]$, respectivamente. Aplicam-se os comentários já feitos nos casos anteriores.

As tabelas 6.59 e 6.60 relacionam, respectivamente, os parâmetros e índices obtidos. Já as figuras 6.37 a 6.40 ilustram as curvas correspondentes.

Tabela 6.59 – Parâmetros GHM 3 termos 3 temperaturas

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)			
$6,2534 \cdot 10^6$	$9,9028 \cdot 10^6$	$6,9802 \cdot 10^2$	$1,7943 \cdot 10^8$			
$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u	θ_1	θ_2	T_F (K)	
$1,1036 \cdot 10^3$	10	$4,051 \cdot 10^{-1}$	14,9837	413,7779	264,5366	

Tabela 6.60 – Índices GHM 3 termos 3 temperaturas

	SSE	SST	R ²
Temp 1	0,50950	14,9305	0,96588
Temp2	0,80202	162,2893	0,99506
Temp3	0,82133	261,3669	0,99686
Total	2,1328	556,0161	0,99616

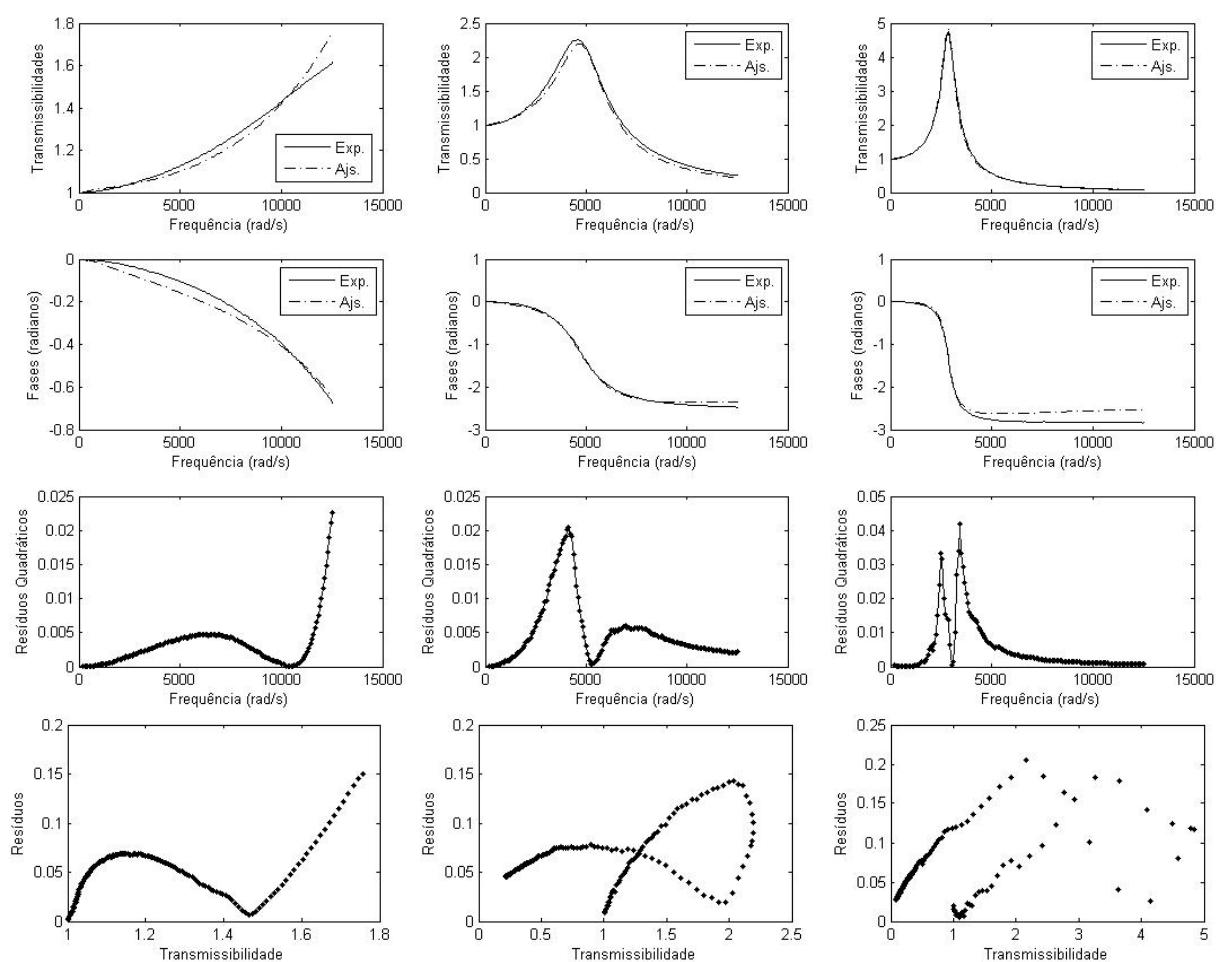


Figura 6.37 – Gráficos das transmissibilidades (módulos), Transmissibilidades (fases), Resíduos quadráticos, ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); GHM 3 termos 3 temperaturas

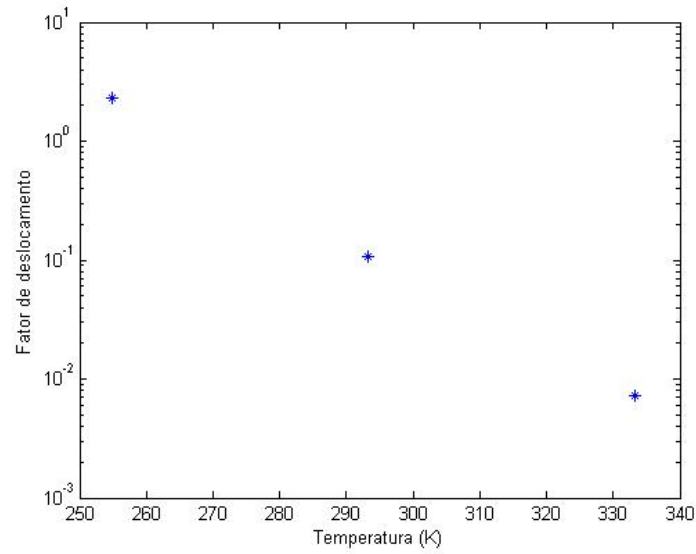


Figura 6.38 – Fator de deslocamento – GHM 3 termos 3 temperaturas

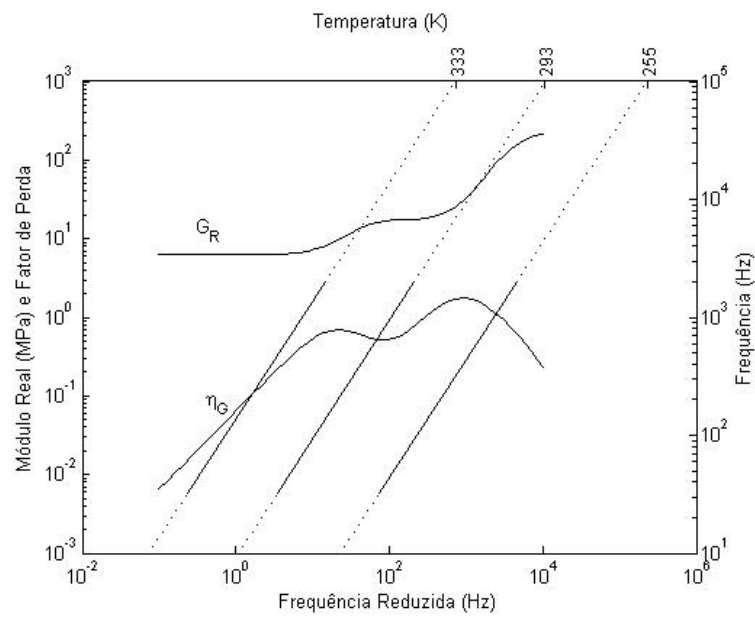


Figura 6.39 – Nomograma de Frequência Reduzida – GHM 3 termos 3 temperaturas

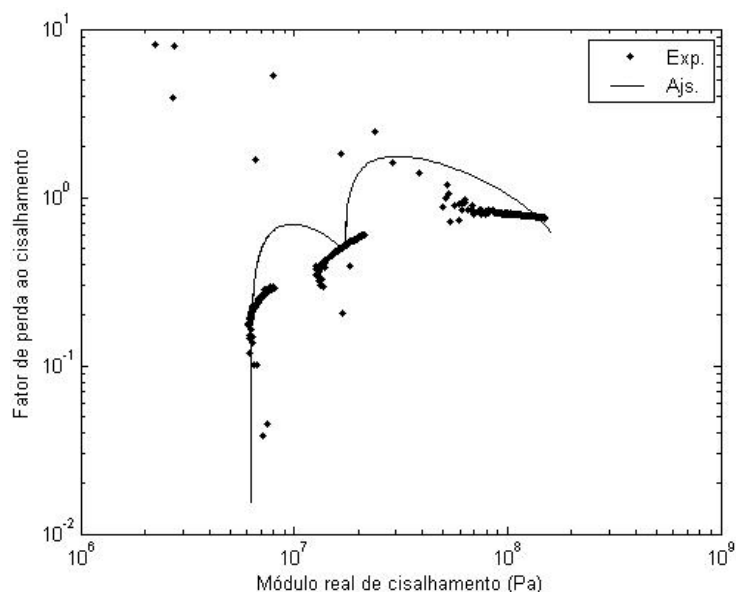


Figura 6.40 - Wicket plot experimental e ajustado – GHM 3 termos 3 temperaturas

Os ajustes se mostram melhores do que no modelo GHM de um termo, mas ainda não se equiparam aos obtidos via modelo de DF. Chama a atenção, no nomograma de frequência reduzida, os dois patamares na curva de módulo real de cisalhamento e os dois picos na curva de fator de perda. Isso indica que, esse material teria duas regiões de transição, o que não condiz com o comportamento típico da borracha butílica, como se observa no Apêndice II, elaborado com, base em Jones (2001). Essas regiões podem ser observadas também no *wicket plot* obtido com os parâmetros ajustados, porém o comportamento do material não é este quando se observa o *wicket plot* obtido com os dados experimentais. Com relação aos resíduos, percebe-se que mantêm-se elevados em torno dos picos de transmissibilidade (módulo).

6.3.2.3 Sete Termos GHM

Os limites inferiores e superiores empregados foram, respectivamente, com as observações já feitas, $Li=[1 \ 1 \ 1 \ 0,001 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ \min(\text{Temp})]$ e $Ls=[10 \ 100 \ 10 \ 1 \ 100 \ 10 \ 100 \ 100 \ 100 \ 100 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 7 \ 10 \ 1 \ 10 \ 3 \ \max(\text{Temp})]$.

Para esse caso, apresenta-se dois resultados. O primeiro, mostrado nas tabelas 6.61 e 6.62 e figuras 6.41 a 6.44, ocorre mais frequentemente, e suas curvas de propriedades

dinâmicas não condizem com o real comportamento do material, apresentando anomalias (patamares no módulo real dinâmico e picos extras no fator de perda) no módulo real de cisalhamento e no fator de perda no nomograma de frequência reduzida. O segundo, exibido nas tabelas 6.63 e 6.4 e figuras 6.45 a 6.48, não apresenta esse comportamento anômalo nas propriedades, aparentando ter se aproximado de um mínimo global, porém, é visto e comentado que se trata apenas de um resultado possível que, apesar de não apresentar essas discrepâncias nas curvas dinâmicas, não fornece valores coerentes com o comportamento real do material ensaiado.

Tabela 6.61 – Parâmetros GHM 7 termos 3 temperaturas

G_0 (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u	θ_1	θ_2
$6,3907 \cdot 10^6$	$1,4263 \cdot 10^4$	1,9448	$9,048 \cdot 10^{-1}$	13,6039	553,4489
$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\alpha}_4$ (Pa)	T_F (K)	
$8,2525 \cdot 10^6$	$2,2213 \cdot 10^5$	$9,4330 \cdot 10^5$	$1,5413 \cdot 10^6$	319,5206	
$\hat{\alpha}_5$ (Pa)		$\hat{\alpha}_6$ (Pa)		$\hat{\alpha}_7$ (Pa)	
$2,4161 \cdot 10^5$		$1,6728 \cdot 10^2$		$1,4137 \cdot 10^8$	

Tabela 6.62 – Índices GHM 7 termos 3 temperaturas

	SSE	SST	R ²
Temp 1	0,10075	14,9305	0,99325
Temp2	0,050915	162,2893	0,99969
Temp3	0,17371	261,3669	0,99934
Total	0,32537	556,0161	0,99941

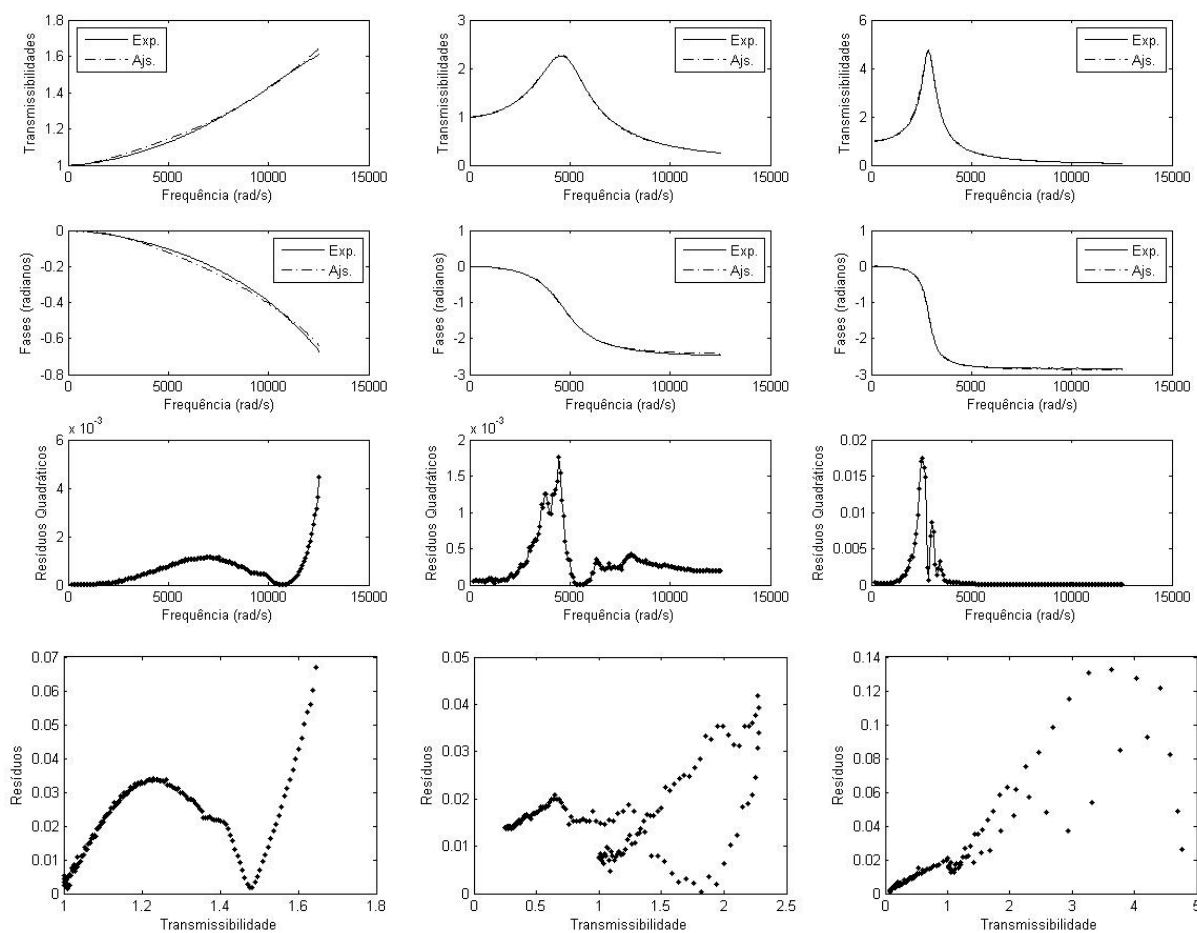


Figura 6.41 – Gráficos das transmissibilidades (módulos), Transmissibilidades (fases), Resíduos quadráticos, ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); GHM 7 termos 3 temperaturas

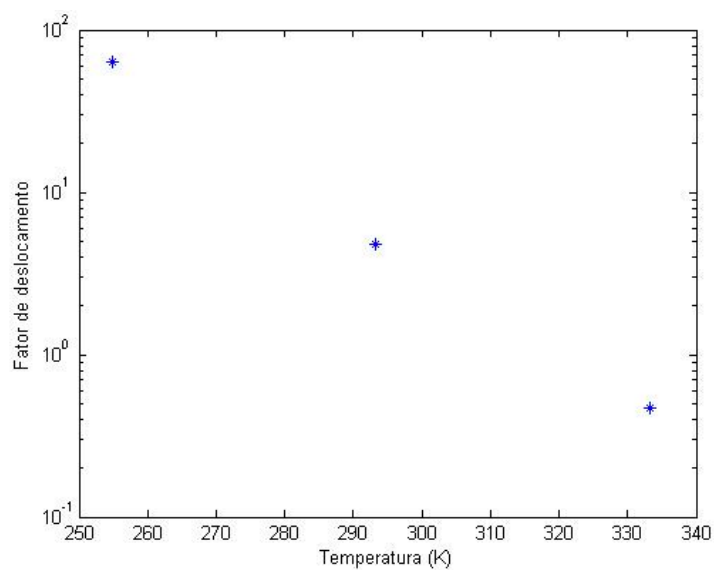


Figura 6.42 – Fator de deslocamento – GHM 7 termos 3 temperaturas

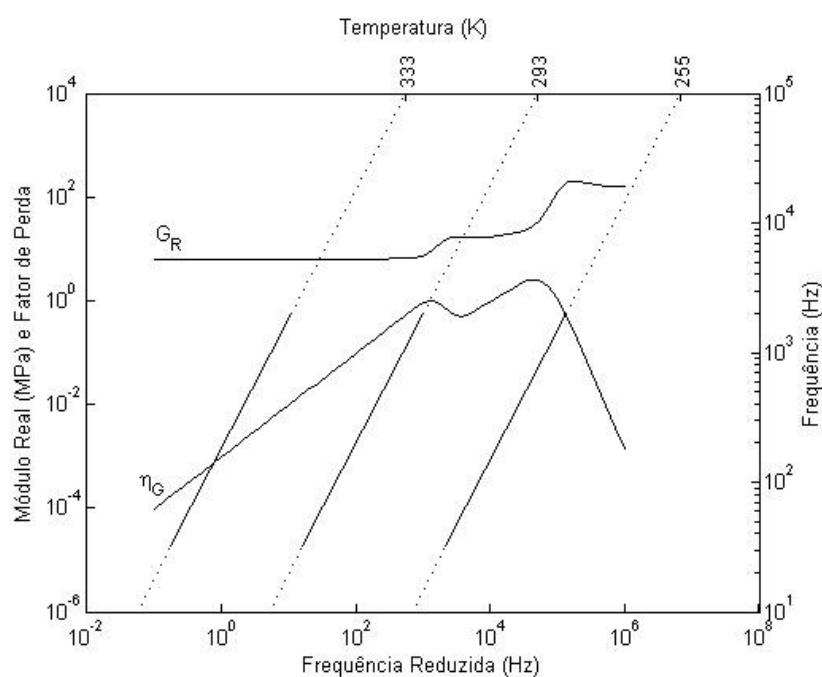


Figura 6.43 – Nomograma de frequência reduzida – GHM 7 termos 3 temperaturas

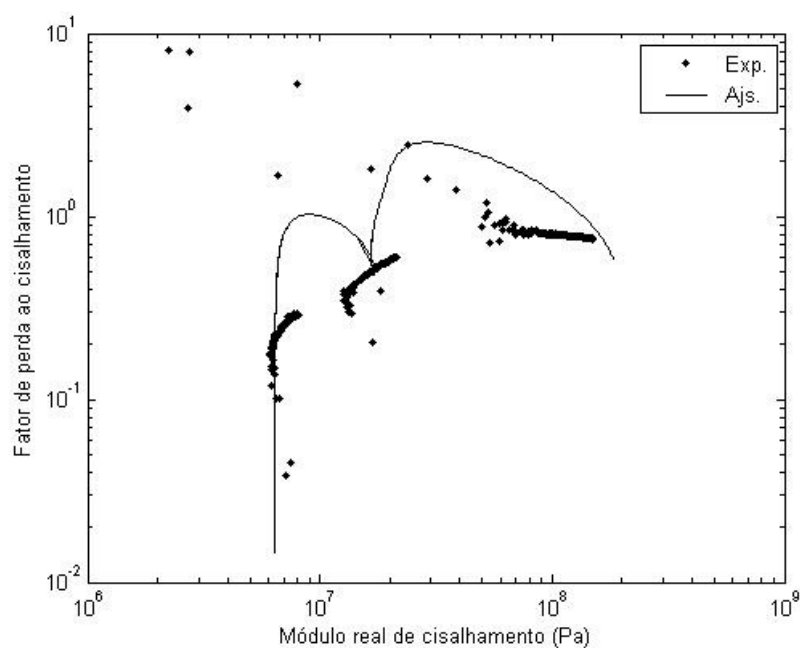


Figura 6.44 - Wicket plot experimental e ajustado – GHM 7 termos 3 temperaturas

Os resultados visuais e numéricos se mostram melhores que os resultados obtidos com três termos e pelo modelo de DF. O nomograma de frequência reduzida apresenta curvas anômalas, tendo deformações no módulo real e principalmente um grande anti-pico no fator

de perda. A curva do *wicket plot* dos ajustes experimentais representa um material com mais de uma região de transição, o que não condiz com o comportamento da borracha butílica.

Tabela 6.63 – Parâmetros GHM 7 termos 3 temperaturas (2)

G_0 (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s^{-1})	r	u	θ_1	θ_2
$7,0000.10^6$	$5,0000.10^6$	5,1250	$1,8300.10^{-2}$	10	481,2500
$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\alpha}_4$ (Pa)	T_F (K)	
$5,8315.10^5$	$3,5790.10^5$	$6,5000.10^5$	$2,0000.10^9$	263,8500	
$\hat{\alpha}_5$ (Pa)		$\hat{\alpha}_6$ (Pa)		$\hat{\alpha}_7$ (Pa)	
$7,7370.10^5$		$7,7023.10^3$		$6,6000.10^5$	

Tabela 6.64 – Índices GHM 7 termos 3 temperaturas (2)

	SSE	SST	R^2
Temp 1	0,067887	14,9305	0,99545
Temp2	0,055248	162,2893	0,99966
Temp3	0,31028	261,3669	0,99881
Total	0,43341	556,0161	0,99922

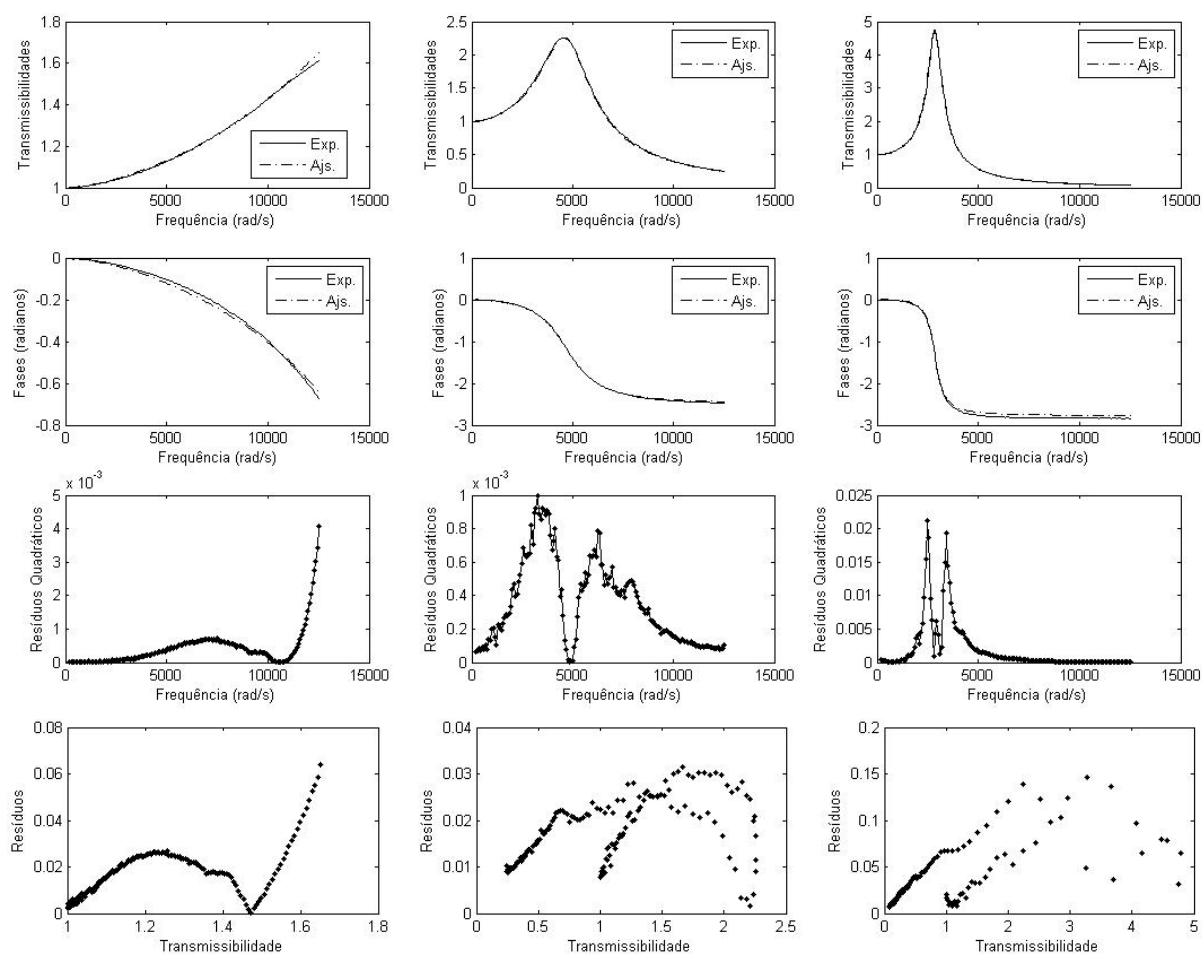


Figura 6.45 – Gráficos das transmissibilidades (módulos), Transmissibilidades (fases), Resíduos quadráticos, ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo); GHM 7 termos 3 temperaturas (2)

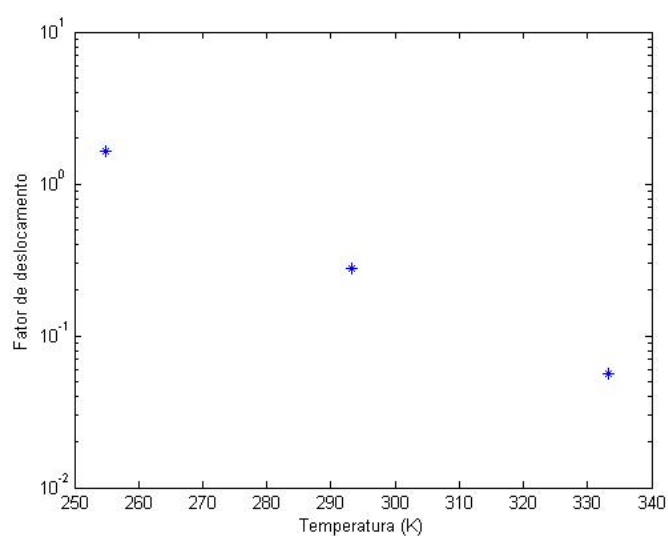


Figura 6.46 – Fator de deslocamento – GHM 7 termos 3 temperaturas (2)

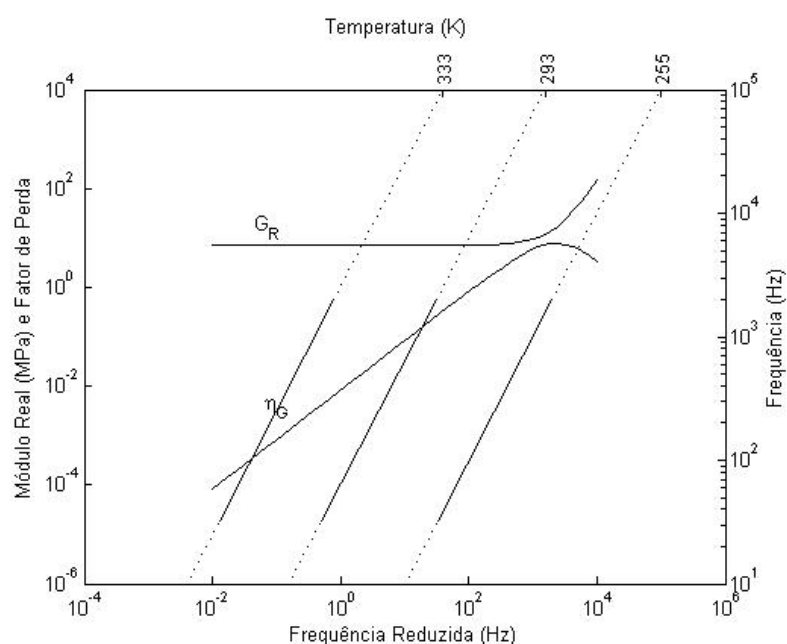


Figura 6.47 – Nomograma de frequência reduzida – GHM 7 termos 3 temperaturas (2)

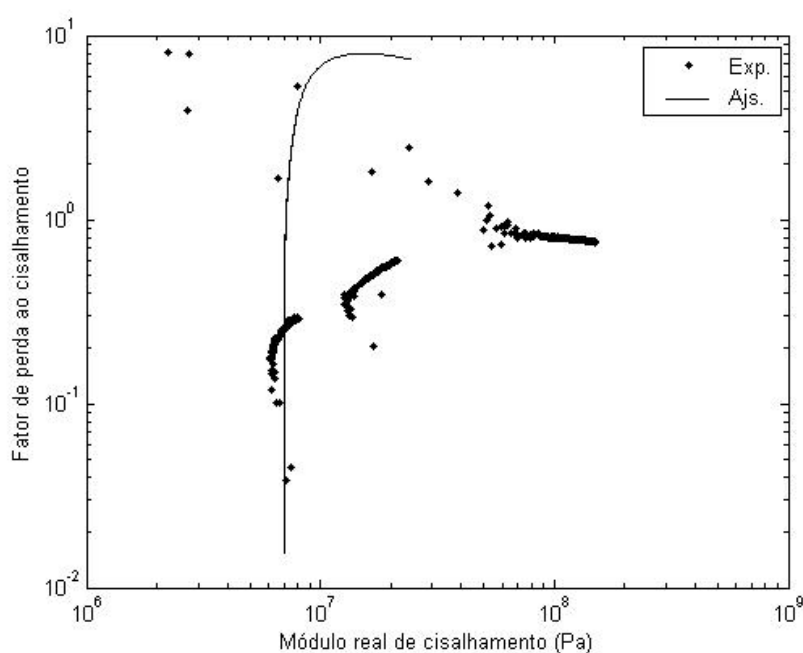


Figura 6.48 - Wicket plot experimental e ajustado – GHM 7 termos 3 temperaturas (2)

Visualmente e numericamente, os resultados obtidos são equivalentes aos obtidos no modelo de DF. Quando se observa o nomograma de frequência reduzida, percebe-se que, para esse ajuste, não se obteve patamares intermediários no módulo real de cisalhamento, nem picos extras no fator de perda. O *wicket plot* feito com os parâmetros ajustados fornece uma curva bastante diferente da curva do *wicket plot* experimental, mas, diferentemente do ajuste

anterior, aponta a existência de apenas uma região de transição. Esse ajuste parece se aproximar de um ótimo global para os parâmetros do modelo GHM, porém, pelos valores observados no nomograma de frequência reduzida e no *wicket plot*, pode-se perceber que se trata de um resultado não condizente com as propriedades típicas da borracha butílica, observadas em Jones (2001) e reproduzidas no apêndice II desta dissertação. Ou seja, apesar de se obter um melhor ajuste, não é possível chegar à conclusão de que um mínimo global foi alcançado. Cabe aqui destacar que isso pode indicar haver a possibilidade de se aprimorar as estimativas iniciais e/ou as regiões de busca. Ou, simplesmente, que a possibilidade de se obter ajustes numérica e visualmente bons não garante a descrição correta das propriedades dinâmicas do material.

6.4 Resultados Obtidos Para Um Conjunto de Nove Temperaturas

A caracterização dinâmica integrada nas nove temperaturas de ensaio foi o passo final dado neste trabalho. Basicamente foi seguido o mesmo procedimento aplicado à caracterização com três temperaturas, sendo utilizados os mesmos limites superiores e inferiores, as mesmas opções de algoritmo genético e extraídos os mesmos parâmetros e curvas. Os resultados, dispostos em ordem crescente de temperatura, são apresentados na sequência.

6.4.1 Modelo de DF

Para o modelo de derivadas fracionárias, os limites inferiores e superiores utilizados foram $Li=[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 6 \ 8 \ -5 \ -8 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ \min(\text{Temp})]$ e $Ls=[10 \ 10 \ 9 \ 10 \ 7 \ 10 \ 0 \ 0 \ 10 \ 1 \ 10 \ 3 \ \max(\text{Temp})]$, respectivamente. Os últimos cinco valores de Li e Ls referem-se à θ_1 e sua ordem de grandeza, θ_2 e sua ordem de grandeza e à temperatura de referência T_F (dada em Kelvin). Sendo “Temp” o vetor de temperaturas. Recorda-se que θ_1 , θ_2 e T_F são parâmetros da equação WLF, embutida na minimização.

Os resultados são apresentados nas tabelas 6.65 e 6.66 e figuras 6.49 a 6.55.

Figura 6.65 – Parâmetros DF 9 temperaturas

G_0 (Pa)	G_1 (Pa)	β	b_0 (s^β)	θ_1	θ_2	T_F (K)
$4,7967 \cdot 10^6$	$4,0566 \cdot 10^8$	$4,2280 \cdot 10^{-1}$	$3,1000 \cdot 10^{-3}$	13,3988	201,7492	263,2025

Figura 6.66 – Índices DF 9 temperaturas

	SSE	SST	R^2
Temp1	0,27343	14,9305	0,98169
Temp2	1,42130	49,7533	0,97143
Temp3	1,78020	101,1975	0,98241
Temp4	1,69490	135,2603	0,98747
Temp5	0,36572	162,2893	0,99775
Temp6	2,78180	190,8724	0,98543
Temp7	3,56060	216,5685	0,98356
Temp8	0,84403	239,4428	0,99648
Temp9	1,89860	261,3669	0,99274
Total	14,6206	1626,106	0,99101

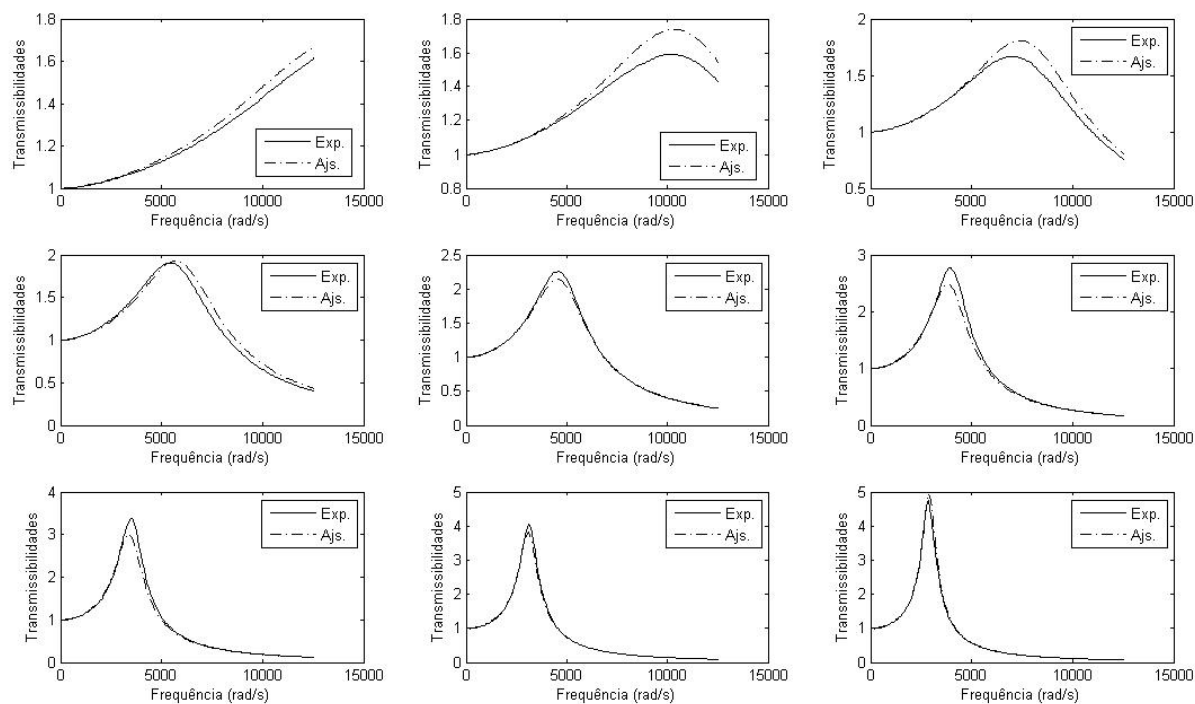


Figura 6.49 – Transmissibilidades (módulos) – DF 9 temperaturas

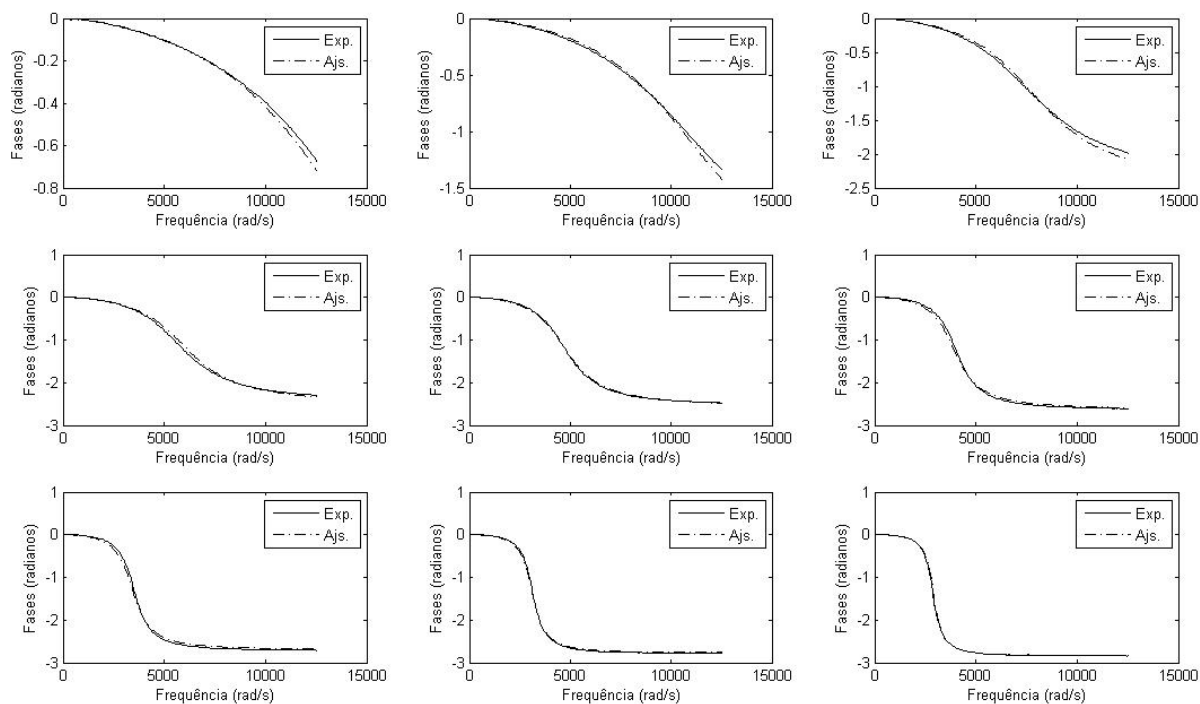


Figura 6.50 – Transmissibilidades (fases) – DF 9 temperaturas

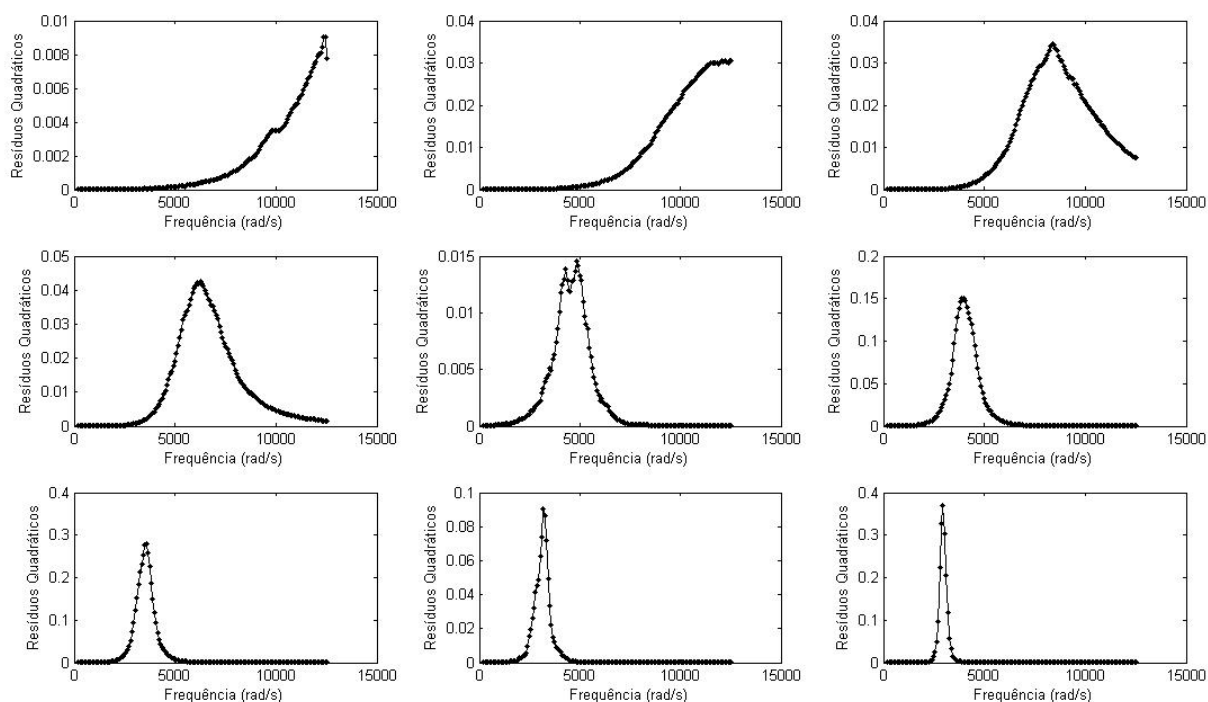


Figura 6.51 – Resíduos quadráticos – DF 9 temperaturas

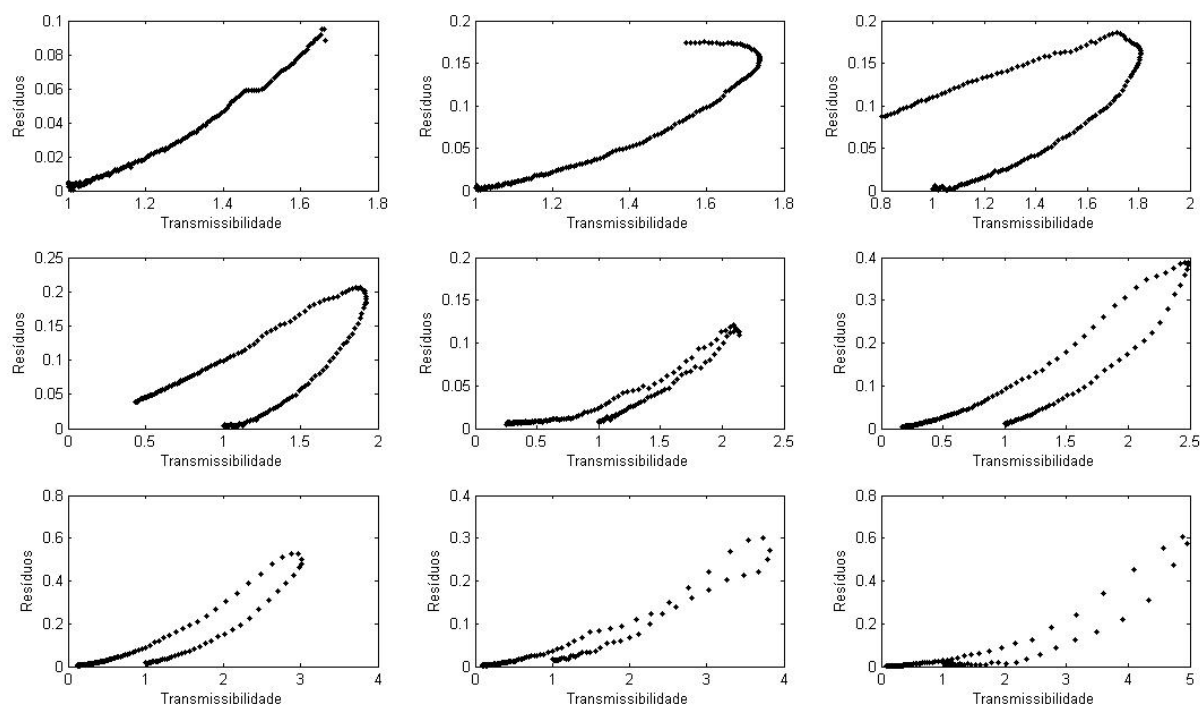


Figura 6.52 – ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo) – DF 9 temperaturas

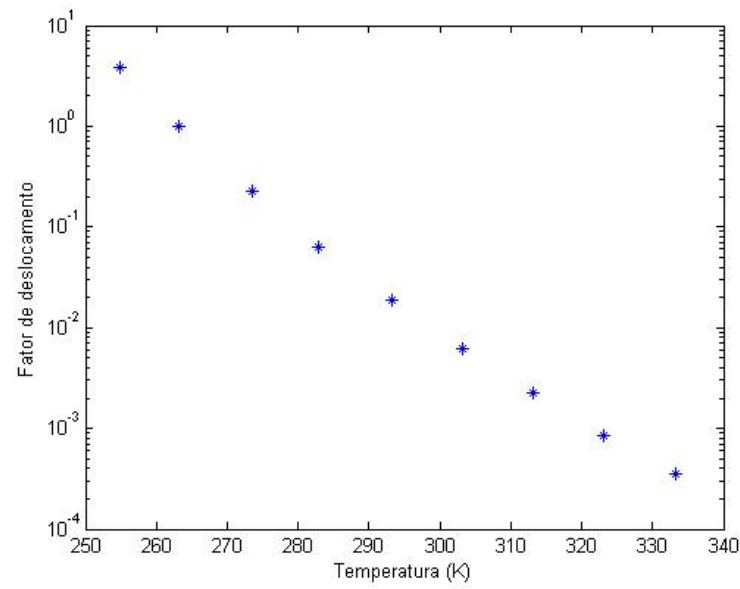


Figura 6.53 – Fator de deslocamento – DF 9 temperaturas

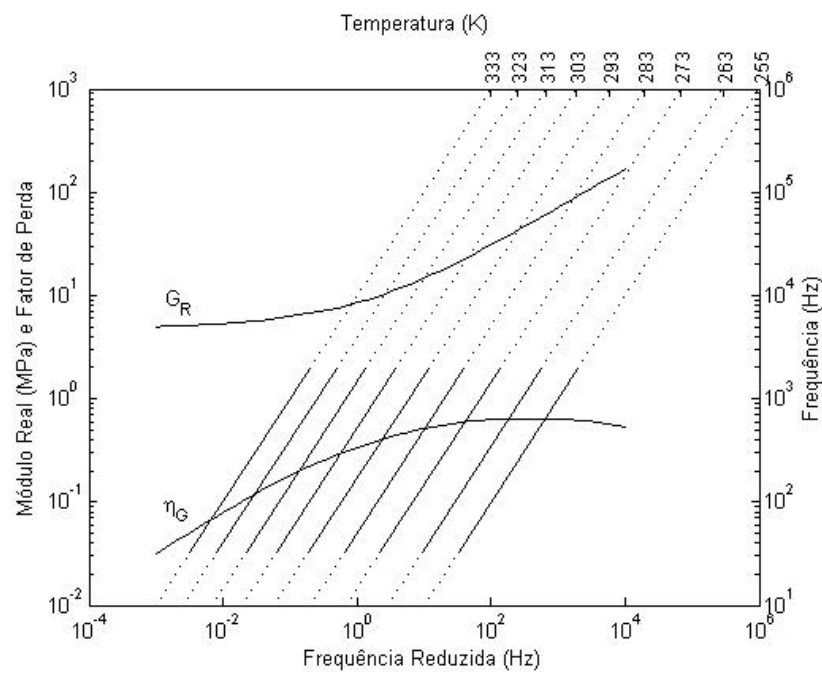


Figura 6.54 – Nomograma de frequência reduzida – DF 9 temperaturas

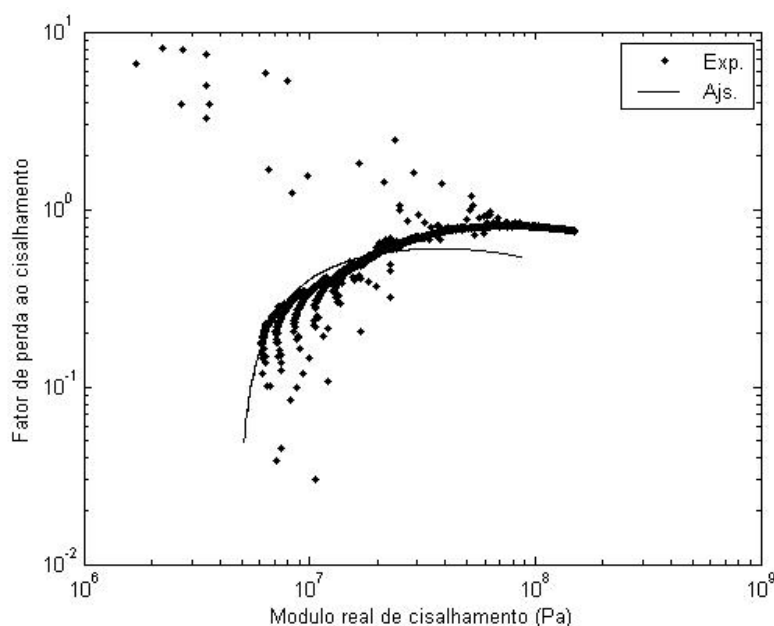


Figura 6.55 - Wicket plot experimental e ajustado – DF 9 temperaturas

Observa-se que visualmente as transmissibilidades (módulo) apresentam um ajuste razoável. Isso pode ser visto numericamente pelo coeficiente R^2 , sendo que o pior ajuste se dá para a temperatura de -10°C e o melhor para a temperatura de 50°C . As fases, com exceção da região de frequências mais altas para as temperaturas mais baixas, se mostram muito bem ajustadas e os erros continuam se apresentando de forma mais expressiva na região em torno dos picos de transmissibilidade (módulo). O *wicket plot* obtido através dos parâmetros ajustados apresenta um fator de perda máximo abaixo do valor da curva do *wicket plot* experimental, e parece apontar para um módulo real de cisalhamento superior um pouco menor do que indicam os dados experimentais.

6.4.2 Modelo GHM

6.4.2.1 Um Termo GHM

Para o modelo GHM de um termo apenas, os limites inferiores e superiores utilizados foram $L_i = [1 \ 1 \ 1 \ 0.001 \ 5 \ 7 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ \min(\text{Temp})]$ e $L_s = [10 \ 10 \ 10 \ 1 \ 7 \ 10 \ 10 \ 10 \ 1 \ 10 \ 3 \ \max(\text{Temp})]$, respectivamente. Valem, novamente, as observações já feitas para L_i e L_s .

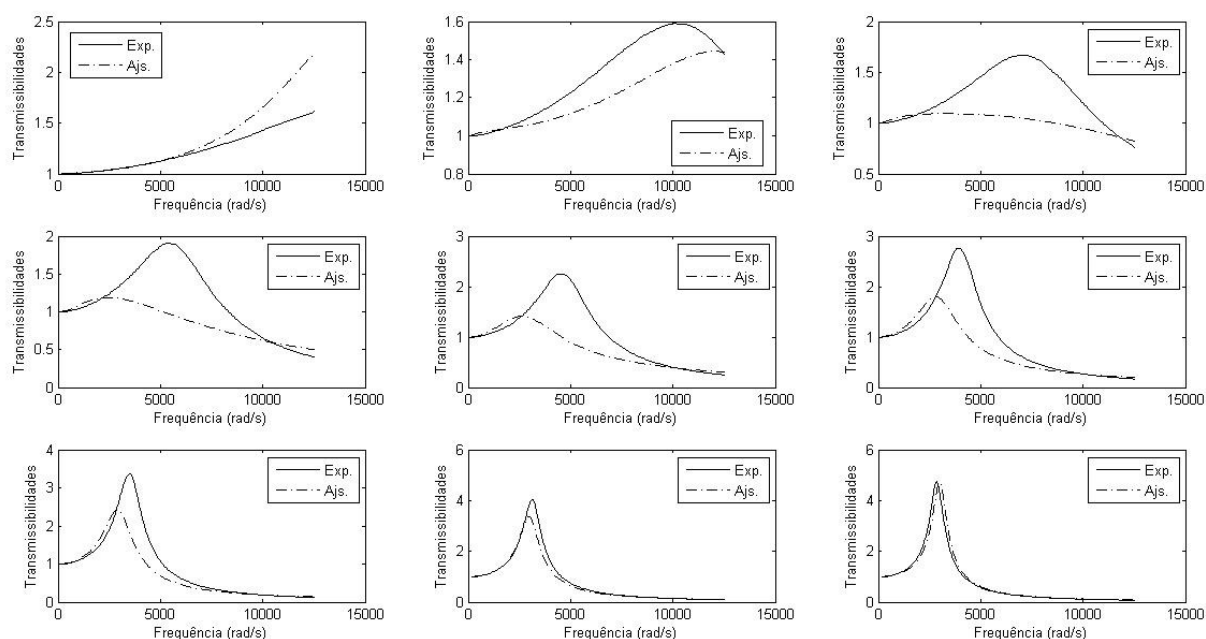
Os resultados correspondentes são apresentados nas tabelas 6.67 e 6.68 e figuras 6.56 a 6.62.

Tabela 6.67 – Parâmetros GHM 1 termo 9 temperaturas

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s^{-1})	u	θ_1	θ_2	T_F (K)
$7,0567 \cdot 10^6$	$1,5440 \cdot 10^8$	$1,3296 \cdot 10^6$	$1,2960 \cdot 10^{-1}$	5,2004	211,3951	274,3242

Tabela 6.68 – Índices GHM 1 termo 9 temperaturas

	SSE	SST	R^2
Temp1	11,6265	14,9305	0,22129
Temp2	4,6397	49,7533	0,90675
Temp3	35,4779	101,1975	0,64942
Temp4	54,9923	135,2603	0,59343
Temp5	64,3103	162,2893	0,60373
Temp6	68,3123	190,8724	0,64210
Temp7	50,7187	216,5685	0,76581
Temp8	11,5761	239,4428	0,95165
Temp9	32,4250	261,3669	0,87594
Total	334,0788	1626,106	0,79455

**Figura 6.56 – Transmissibilidades (módulo) – GHM 1 termo 9 temperaturas**

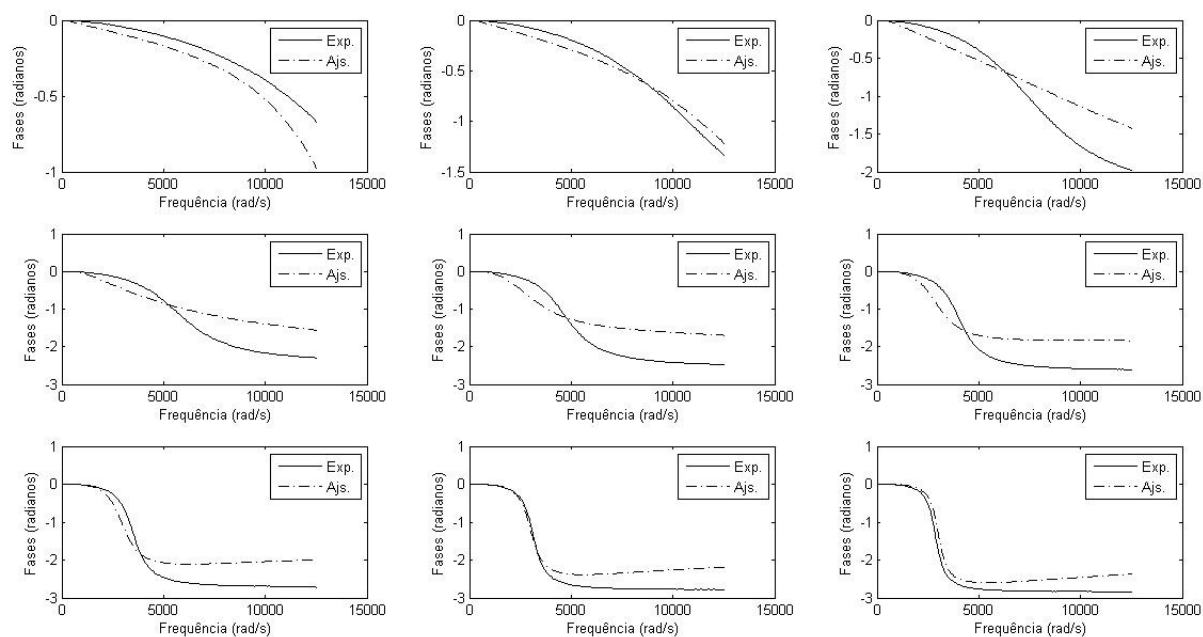


Figura 6.57 – Transmissibilidades (fases) – GHM 1 termo 9 temperaturas

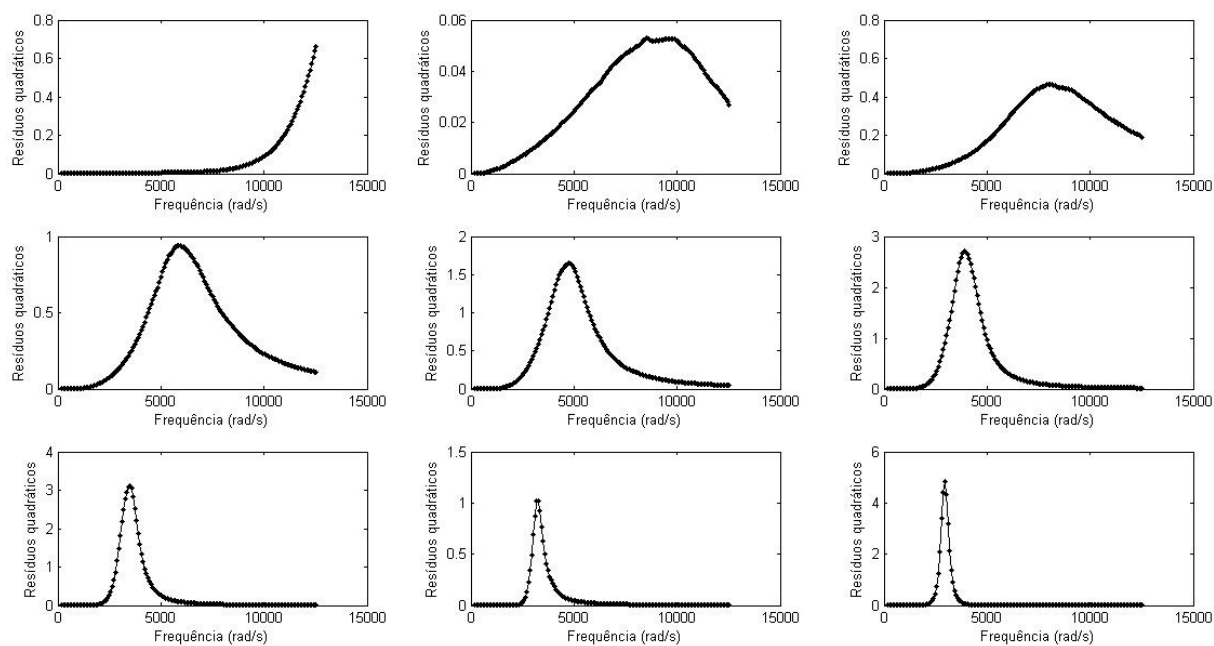


Figura 6.58 – Resíduos quadráticos – GHM 1 termo 9 temperaturas

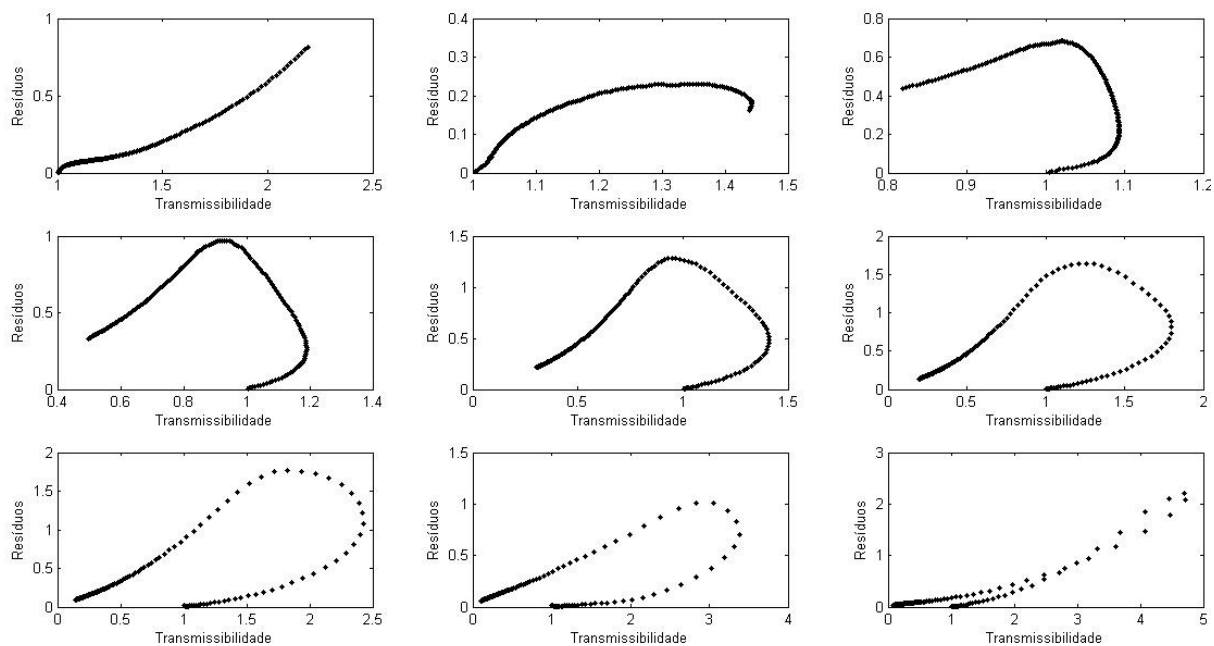


Figura 6.59 – ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo)

GHM 1 termo 9 temperaturas

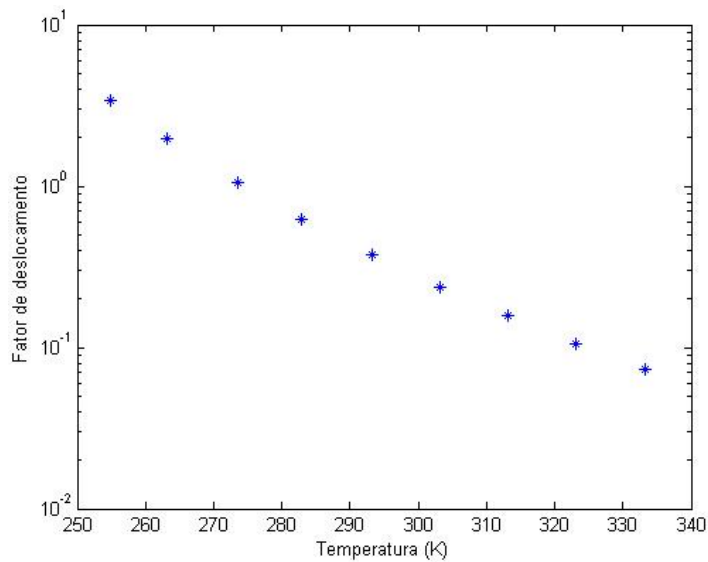


Figura 6.60 – Fator de deslocamento – GHM 1 termo 9 temperaturas

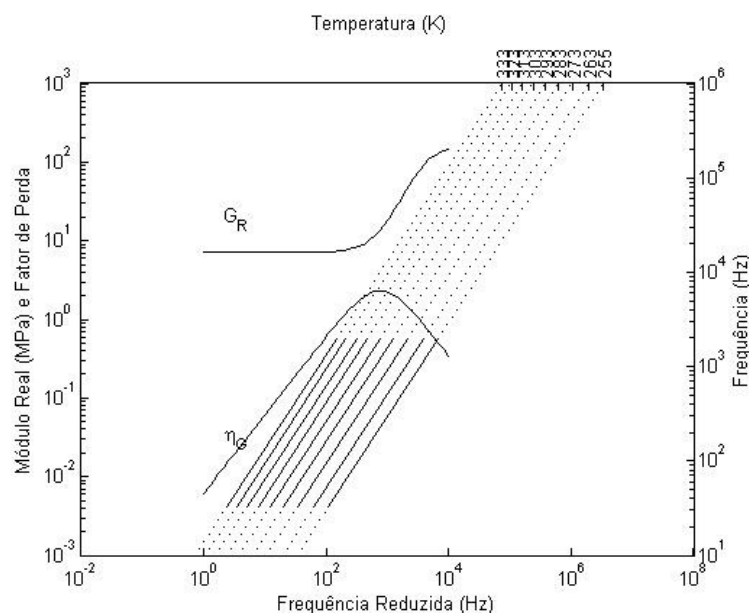


Figura 6.61 – Nomograma de Frequência Reduzida – GHM 1 termo 9 temperaturas

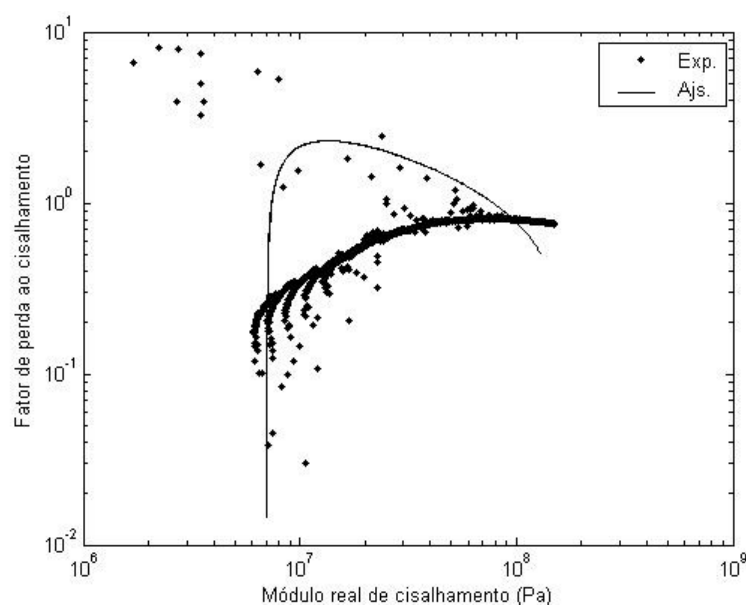


Figura 6.62 - Wicket plot experimental e ajustado – GHM 1 termo 9 temperaturas

Os resultados visuais e os valores dos coeficientes se apresentam muito piores do que os obtidos no modelo de DF. Os resíduos são bastante expressivos próximos aos picos de transmissibilidade (módulo) e o *wicket plot* obtido com os parâmetros ajustados mostra uma curva com valores de fator de perda bem maiores do que os valores obtidos na curva do *wicket plot* experimental. Os valores de fator de perda observados no nomograma de

frequência reduzida não condizem com as propriedades típicas do material, como pode ser visto no apêndice II.

6.4.2.2 Três Termos GHM

No modelo GHM de três termos, foram utilizados os seguintes limites inferiores e superiores: $Li = [1 \ 1 \ 1 \ 0,001 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ \min(\text{Temp})]$ e $Ls = [10 \ 100 \ 10 \ 1 \ 100 \ 10 \ 100 \ 10 \ 10 \ 10 \ 7 \ 10 \ 1 \ 10 \ 3 \ \max(\text{Temp})]$, respectivamente.

Os resultados associados são apresentados nas tabelas 6.69 e 6.70 e figuras de 6.63 a 6.69.

Tabela 6.69 – Parâmetros GHM 3 termos 9 temperaturas

G_0 (Pa)	$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)		
$6,5630 \cdot 10^6$	$9,1522 \cdot 10^6$	$9,8599 \cdot 10^6$	$1,4941 \cdot 10^8$		
$\hat{\beta}_1$ (s ⁻¹)	r	u	θ_1	θ_2	T_F (K)
$5,6719 \cdot 10^3$	10	$1,053 \cdot 10^{-1}$	10,9012	246,6382	254,85

Tabela 6.70 – Índices GHM 3 termos 9 temperaturas

	SSE	SST	R ²
Temp1	9,7096	14,9305	0,34968
Temp2	2,1451	49,7533	0,95688
Temp3	11,9678	101,1975	0,88174
Temp4	8,5392	135,2603	0,93687
Temp5	4,3246	162,2893	0,97335
Temp6	18,2889	190,8724	0,90418
Temp7	32,6167	216,5685	0,84939
Temp8	15,6243	239,4428	0,93475
Temp9	9,6486	261,3669	0,96308
Total	112,8648	1626,106	0,93059

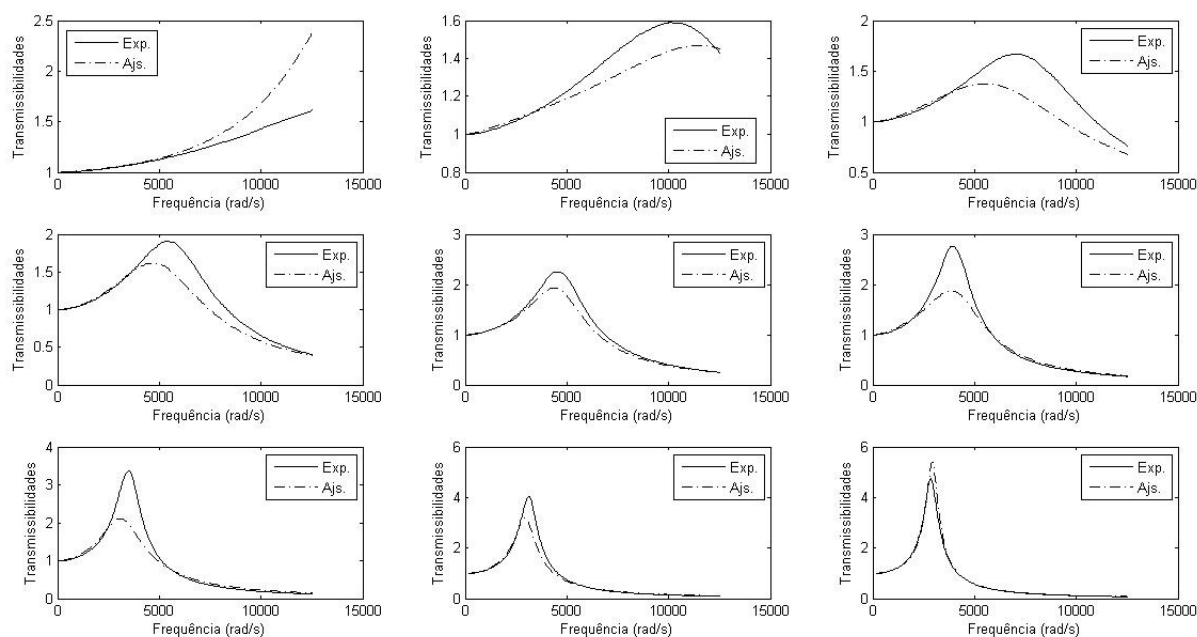


Figura 6.63 – Transmissibilidades (módulo) – GHM 3 termos 9 temperaturas

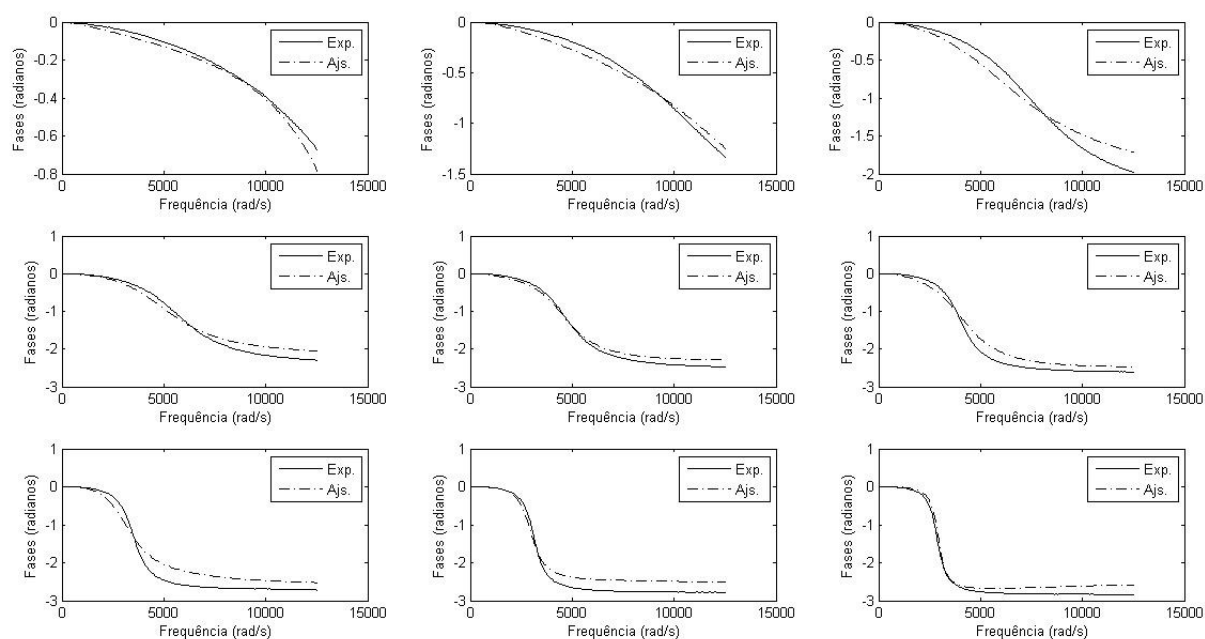


Figura 6.64 – Transmissibilidades (fases) – GHM 3 termos 9 temperaturas

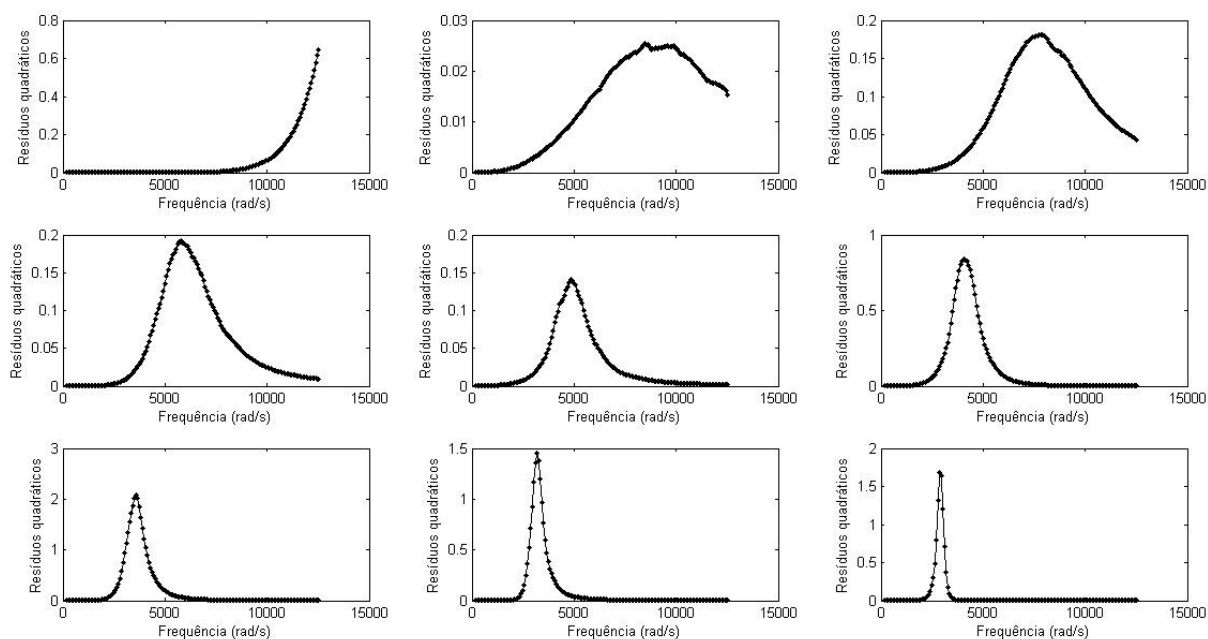


Figura 6.65 – Resíduos quadráticos – GHM 3 termos 9 temperaturas

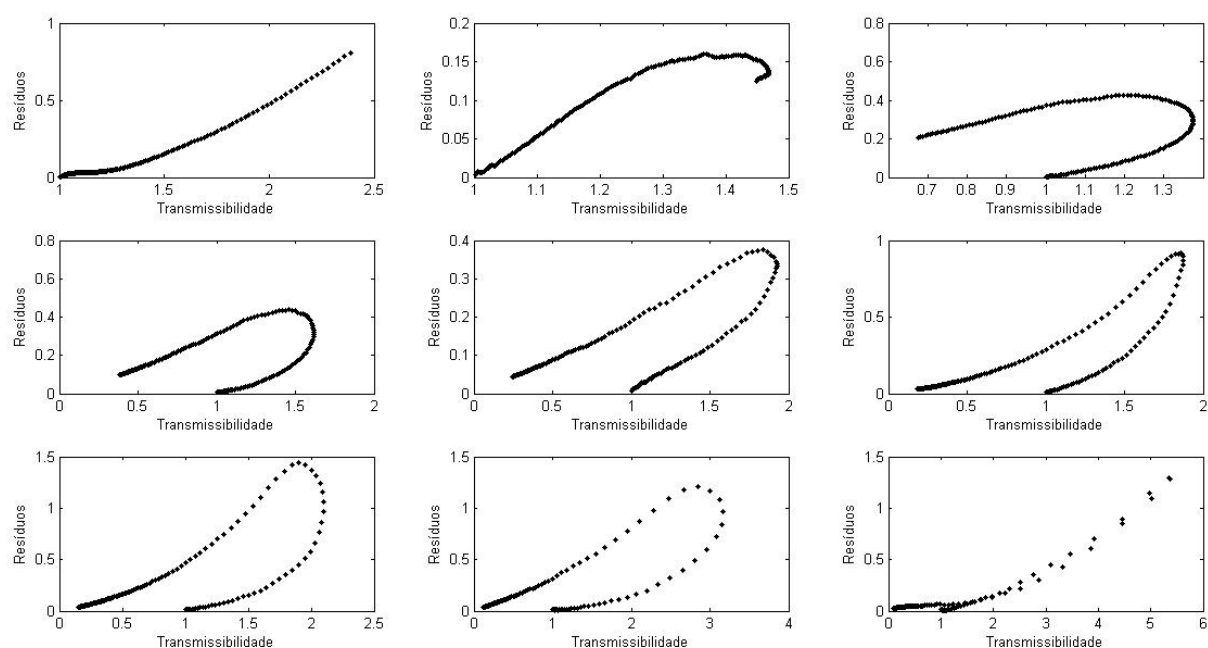


Figura 6.66 – ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo) – GHM 3 termos 9 temperaturas

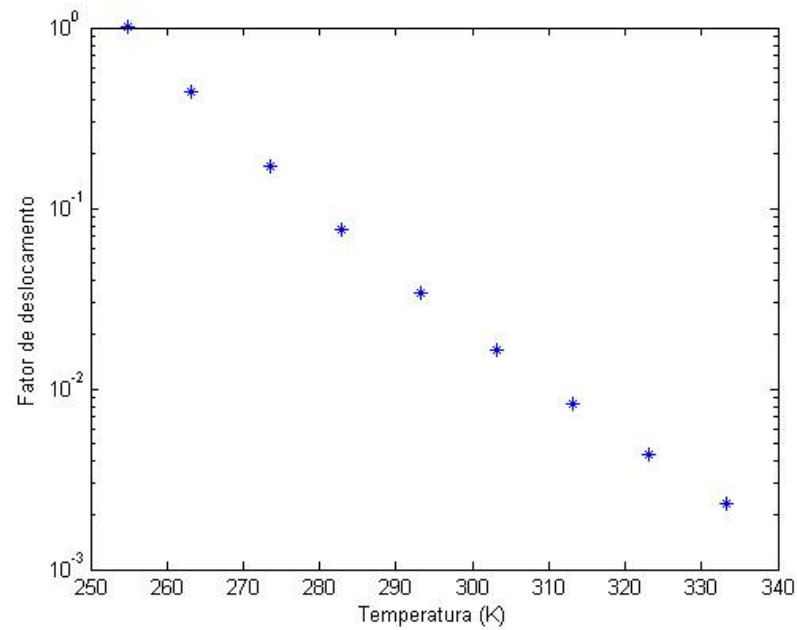


Figura 6.67 – Fator de deslocamento – GHM 3 termos 9 temperaturas

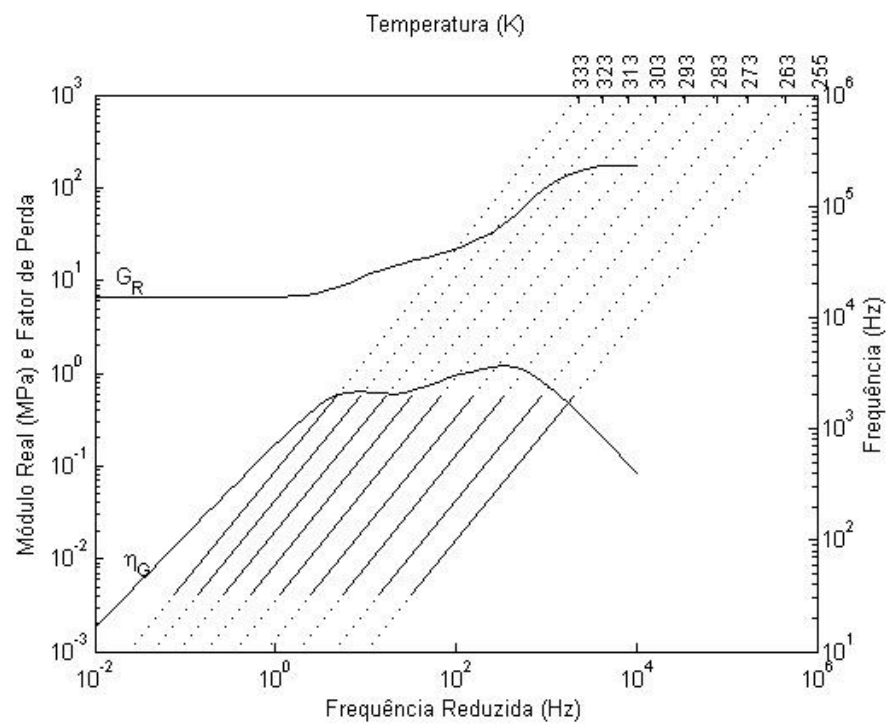


Figura 6.68 – Nomograma de Frequência Reduzida – GHM 3 termos 9 temperaturas

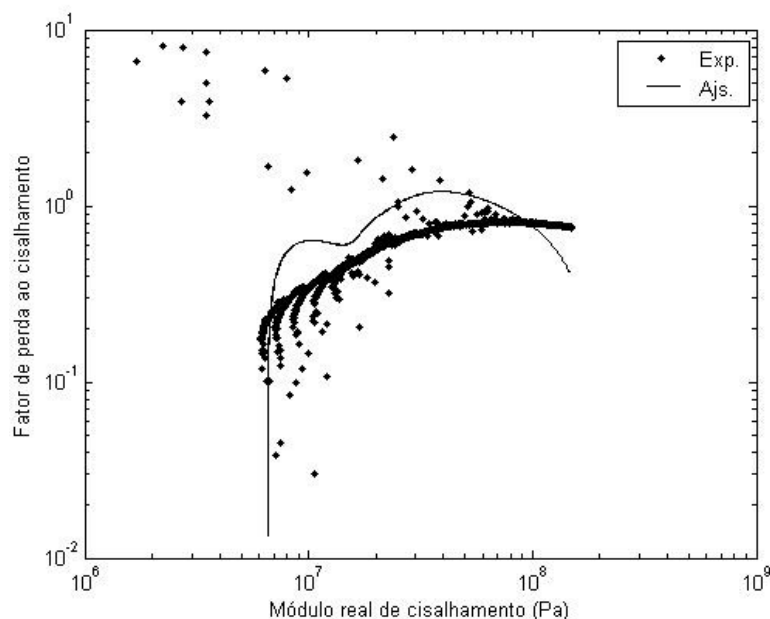


Figura 6.69 - Wicket plot experimental e ajustado – GHM 3 termos 9 temperaturas

Esse ajuste apresentou curvas e índices ainda um pouco distantes dos resultados obtidos com o modelo de DF, porém, com uma melhora significativa com relação ao modelo GHM de um termo. Observa-se no nomograma de frequência reduzida uma curva de fator de perda com valores extremamente reduzidos (menores que 0,01), não característicos da borracha butílica nas frequências e temperaturas correspondentes. A figura 6.69 apresenta a curva do *wicket plot* obtido com os parâmetros ajustados, indicando a existência de duas regiões de transição. Mas, vale ressaltar que, o *wicket plot* ajustado se aproxima bastante do experimental quando comparado aos *wicket plot* obtidos via DF e GHM de um termo.

6.4.2.3 Sete Termos GHM

Os limites inferiores e superiores empregados, foram respectivamente

$Li=[1 \ 1 \ 1 \ 0,001 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 5 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ \min(\text{Temp})]$ e $Ls=[10 \ 100 \ 10 \ 1 \ 100 \ 10 \ 100 \ 100 \ 100 \ 100 \ 100 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 7 \ 10 \ 1 \ 10 \ 3 \ \max(\text{Temp})];$

Tabela 6.71 – Parâmetros GHM 7 termos 9 temperaturas

G_0 (Pa)	$\hat{\beta}_1$ (s^{-1})	r	u	θ_1	θ_2
$6,6914 \cdot 10^6$	$1,0666 \cdot 10^3$	3,5857	0,9367	49,4112	$1,6262 \cdot 10^3$
$\hat{\alpha}_1$ (Pa)	$\hat{\alpha}_2$ (Pa)	$\hat{\alpha}_3$ (Pa)	$\hat{\alpha}_4$ (Pa)	T_F (K)	
$3,0939 \cdot 10^6$	$3,4241 \cdot 10^6$	$6,4191 \cdot 10^6$	$1,7437 \cdot 10^7$	293,48	
$\hat{\alpha}_5$ (Pa)		$\hat{\alpha}_6$ (Pa)		$\hat{\alpha}_7$ (Pa)	
$9,1078 \cdot 10^7$		$6,3994 \cdot 10^6$		$1,6514 \cdot 10^4$	

Tabela 6.72 – Índices GHM 7 termos 9 temperaturas

	SSE	SST	R ²
Temp1	0,12379	14,9305	0,99171
Temp2	0,00685	49,7533	0,99986
Temp3	0,28375	101,1975	0,99720
Temp4	0,39261	135,2603	0,99710
Temp5	0,36810	162,2893	0,99773
Temp6	0,61939	190,8724	0,97675
Temp7	0,33618	216,5685	0,99845
Temp8	0,07141	239,4428	0,99970
Temp9	0,1854	261,3669	0,99929
Total	2,3875	1626,106	0,99853

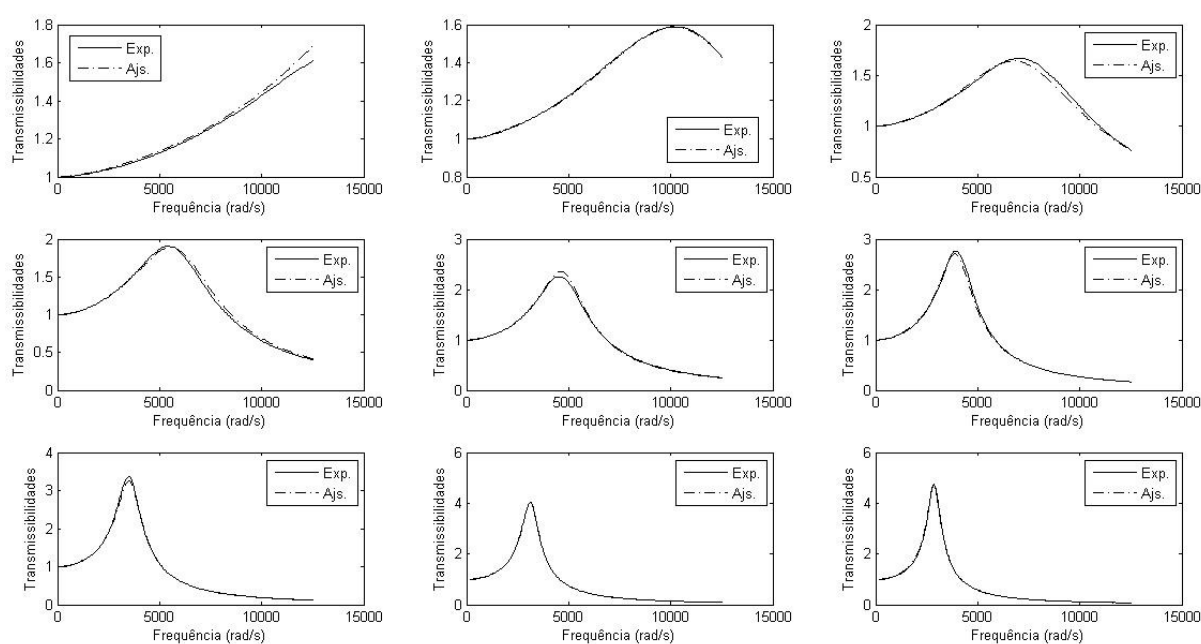


Figura 6.70 – Transmissibilidades (módulo) – GHM 7 termos 9 temperaturas

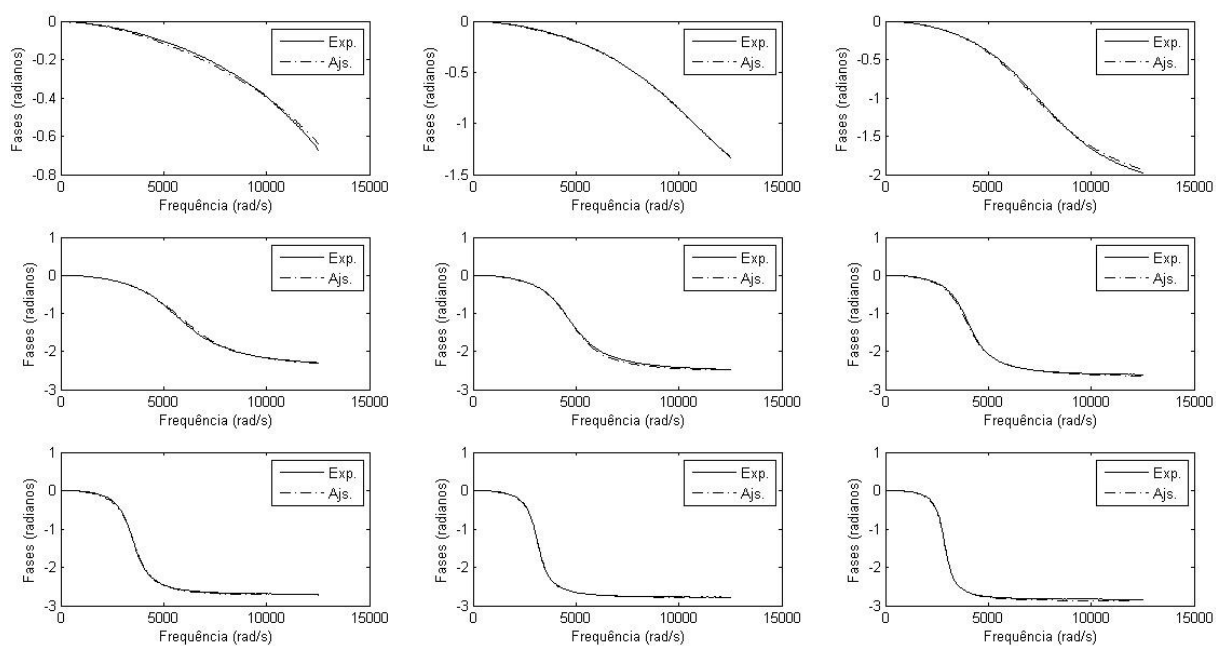


Figura 6.71 – Transmissibilidades (fases) – GHM 7 termos 9 temperaturas

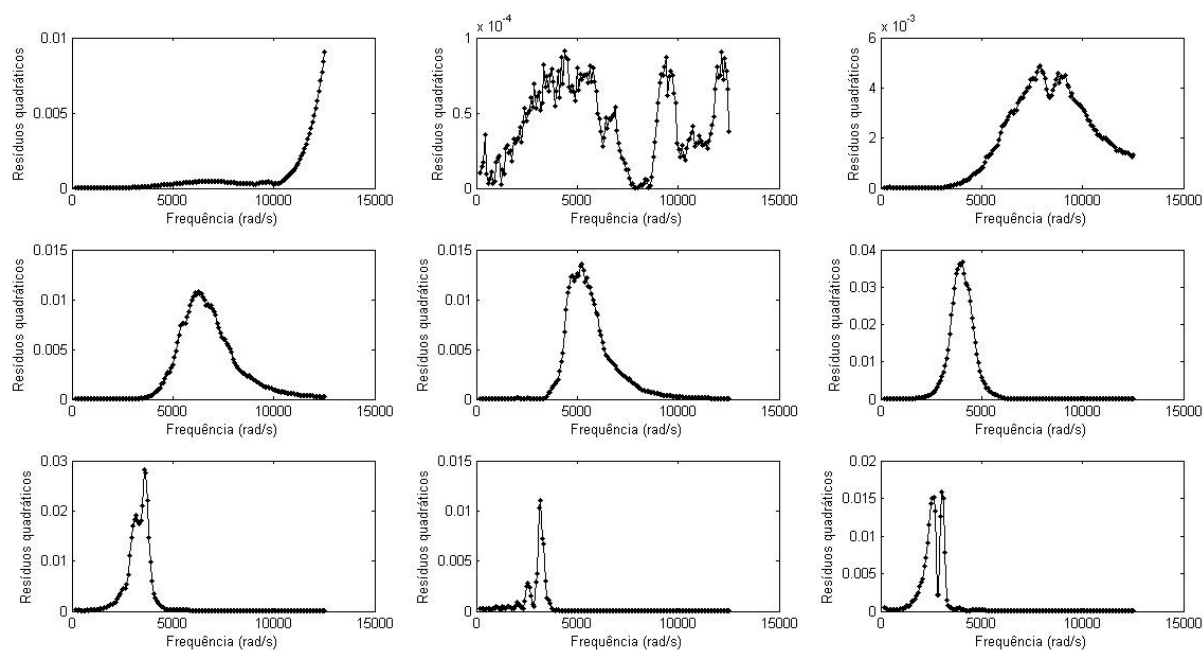


Figura 6.72 – Resíduos quadráticos – GHM 7 termos 9 temperaturas

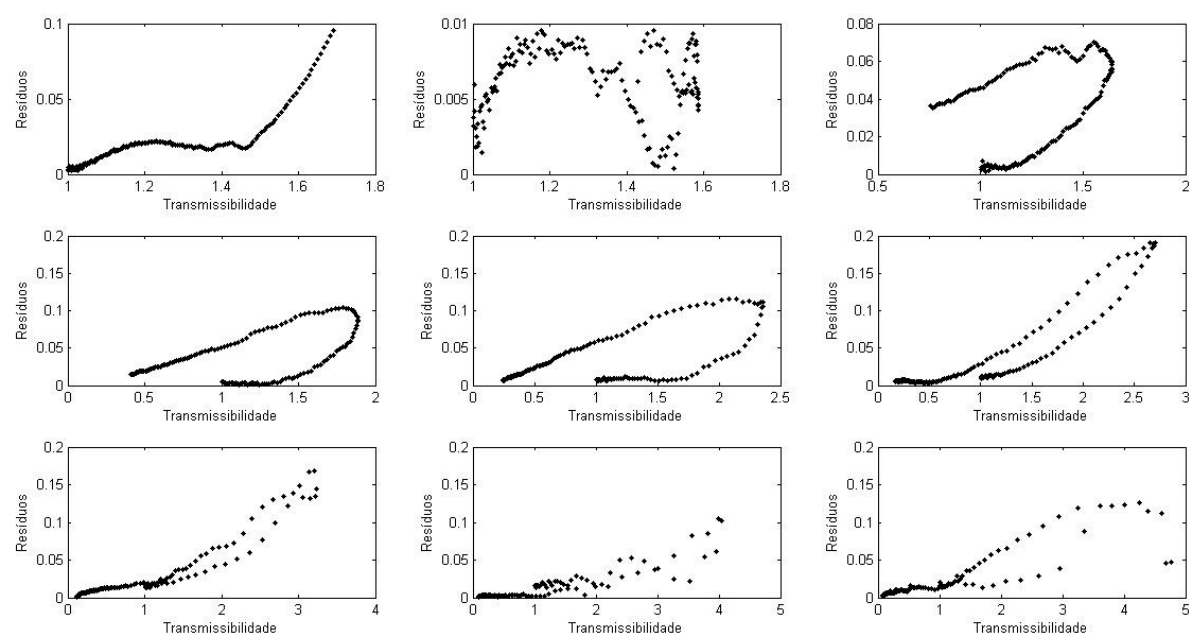


Figura 6.73 – ResíduosXTransmissibilidade ajustada (módulo) – GHM 7 termos 9 temperaturas

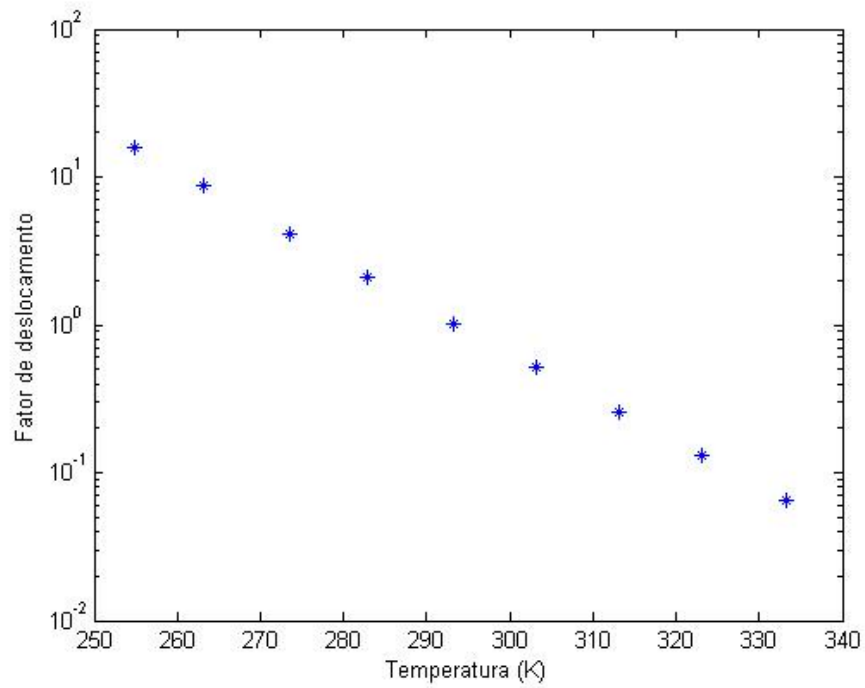


Figura 6.74 – Fator de deslocamento – GHM 7 termos 9 temperaturas

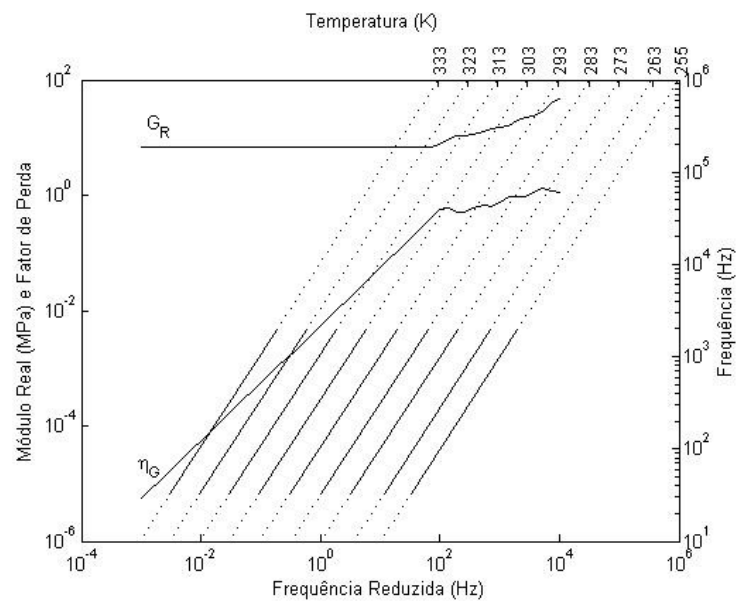


Figura 6.75 – Nomograma de Frequência Reduzida – GHM 7 termos 9 temperaturas

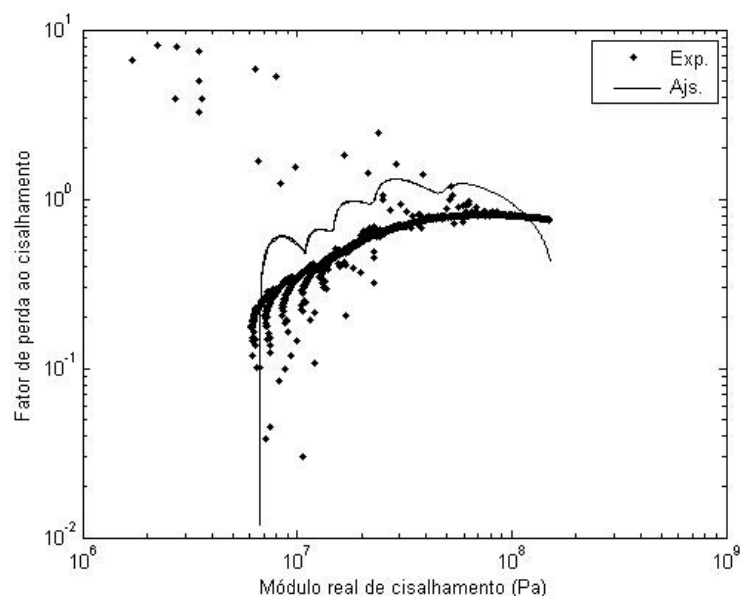


Figura 6.76 - *Wicket plot* experimental e ajustado – GHM 7 termos 9 temperaturas

O ajuste com 7 termos GHM em 9 temperaturas não apresentou robustez alguma, por vezes conseguiu-se resultados ruins e por outras resultados muito bons. Apesar de se obter um ajuste de transmissibilidades excelente, as curvas das propriedades dinâmicas são anômalas. Quanto ao resultado apresentado observa-se que os índices obtidos são muito melhores que os obtidos no modelo de DF, porém, o nomograma de frequência reduzida, apresenta patamares no módulo real de cisalhamento e vários picos extras no fator de perda que indicam a presença de mais de uma região de transição. A curva do *wicket plot* obtido através dos parâmetros ajustados também apresenta muitos picos, o que não condiz com as propriedades dinâmicas típicas do material em questão.

7 CONCLUSÃO

7.1 Comentários Finais

O controle de vibrações e ruídos utilizando materiais viscoelásticos é comumente empregado e requer, para fins de projeto, que se conheçam as propriedades dinâmicas do material. Para tanto, modela-se matematicamente o elastômero e buscam-se parâmetros de modelos matemáticos que expliquem, satisfatoriamente, o comportamento desse material, descrevendo-o através das curvas de módulo dinâmico e fator de perda. Nesse processo, dados experimentais relativos ao elastômero são empregados.

Foram investigados os modelos GHM e via cálculo fracionário, com a utilização da equação WLF para obtenção dos fatores de deslocamento em frequência. Os decorrentes resultados foram apresentados numérica e graficamente. O estudo desses modelos foi feito de forma imparcial, procurando-se dar igualdade de condições, a fim de que os resultados finais obtidos não fossem tendenciosos. Para tanto, empregou-se o método dos algoritmos genéticos, que proporciona uma estimativa inicial mais eficaz relativa ao modelo GHM, tendo em vista que a região de busca dos parâmetros deste se mostrou muito ampla. O tempo computacional não é citado, pois este varia muito de acordo com as estimativas iniciais encontradas pelo método de algoritmos genéticos, principalmente para o caso do modelo GHM.

Os resultados obtidos aprofundam as informações encontradas na revisão bibliográfica. O estudo da influência de cada parâmetro para cada modelo mostra, logo de saída, uma pequena vantagem a favor do modelo via DF com relação ao modelo GHM, em função da possibilidade de mudança na inclinação do módulo dinâmico (real) na região de transição e, simultaneamente, da alteração de magnitude do pico do fator de perda.

Os ajustes feitos em uma temperatura mostram que vários valores de parâmetro diferentes são obtidos, indicando que uma única temperatura é insuficiente para que se tenha um ajuste amplo, embora os resultados para os dois modelos sejam satisfatórios para a temperatura em que o ajuste é realizado. Observou-se também que o método GHM necessitou de mais termos para que os resultados dos ajustes se equiparassem aos obtidos via DF.

O ajuste com três temperaturas serviu como um passo intermediário de investigação dos algoritmos computacionais e também como uma análise da possibilidade do uso de um número menor de temperaturas na caracterização integrada.

Por fim, o ajuste com nove temperaturas utilizou todos os dados experimentais extraídos. Entende-se que ele, por ser o mais completo, é o que fornece resultados mais confiáveis. Como forma de comparação entre os modelos, foi proposta uma análise numérica, o que é, de certa forma, uma distinção deste com relação a outros trabalhos, que apresentam, via de regra, uma análise simplesmente gráfica ou visual.

Na comparação direta entre os modelos, algumas foram as observações feitas no transcorrer desta dissertação, podendo-se observar alguns detalhes relativos à programação e aos resultados. Primeiramente, o fato de o GHM ter parâmetros sem um significado físico imediato evidencia uma dificuldade em limitar uma região de busca de valores. O uso deste modelo em sua forma mais simples não fornece bons resultados, face à ausência de controle sobre a inclinação da região de transição no módulo real dinâmico.

O emprego de mais termos pode gerar bons ajustes, quando vistas as transmissibilidades ajustadas. Porém, as curvas de fator de perda e módulo real, representadas no nomograma de frequência reduzida, mostram deformidades que não correspondem às propriedades típicas do material. Essas propriedades são conhecidas por experiência e também da literatura. Ainda com relação à adição de termos, é válido lembrar que o método via derivadas fracionárias também apresenta esta possibilidade, o que não foi empregado nesta dissertação por ser desnecessário.

A firma-se na literatura (BARBOSA e BATTISTA, 2000; TRINDADE e ALMEIDA, 2006) que, normalmente, o modelo GHM representa muito bem as variações das propriedades do material viscoelástico com relação à frequência em uma temperatura constante. Isso acontece, de fato, em ajustes feitos com temperaturas fixas, onde o modelo GHM se equiparou ao modelo de cálculo fracionário, porém, requerendo três termos GHM. Com a adição de temperaturas, um número maior de termos é necessário, sendo que ocorre uma melhora quanto aos resultados obtidos quando o número de termos GHM é maior.

Nota-se que o emprego de sete termos GHM foi razoavelmente suficiente. Isso gerou um total de vinte e cinco parâmetros a serem otimizados, enquanto que o modelo de DF necessitou de treze (esses números incluem os parâmetros do modelo e suas ordens de grandeza, bem como os parâmetros da equação WLF). Ainda assim, muitas vezes, o modelo de DF apresenta resultados um pouco melhores, no tocante à qualidade das curvas ajustadas.

Entende-se, a partir dos resultados oferecidos por este trabalho, que o modelo GHM, de particular conveniência para o uso em elementos finitos, não apresenta na caracterização dinâmica ampla a mesma adequação que o modelo de DF.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Espera-se que esse trabalho sirva como base para futuras investigações sobre modelos de caracterização dinâmica de elastômeros, tanto via DF quanto, principalmente, via GHM.

Sugere-se, para estudos futuros, que sejam feitas investigações para outros elastômeros, análise de como se dá a influência de cada parâmetro para mais de um termo nos dois modelos e a realização de ajustes ponderados, em que se estabeleça um critério que possibilite dar maior peso aos pontos onde os resíduos são maiores.

Também pode ser interessante a realização de uma análise mais aprofundada no uso de algoritmos genéticos e a utilização de outros algoritmos de otimização global para a caracterização integrada.

REFERÊNCIAS

ANDERSON-SPRECHER, R.; **Model Comparisons and R^2** . The American Statisticians. Vol. 48, Nº 2. 1994.

ASTM E756.; **Standard Test Method for Measuring Vibration-Damping Properties of Materials**. ASTM. 1998.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. **A Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to Viscoelasticity**. Journal of Rheology, Vol. 27, pp. 201 – 210, 1983.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. **On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behaviour**. Journal of Rheology, Vol. 30, pp. 133 – 155, 1986.

BARBOSA, F. S.; BATTISTA, R. C. **Modelagem no Domínio do Tempo e da Frequência de Estruturas com Camadas Viscoelásticas**. XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, 2000.

BARBOSA, F. S.; **Modelagem Computacional de Estruturas com Camadas Viscoelásticas Amortecidas**. Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.

BAVASTRI, C. A.; **Redução de Vibrações de Banda Larga em Estruturas Complexas por Neutralizadores Viscoelásticos**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1997.

BAVASTRI, C. A.; ESPÍNDOLA, J. J.; TEIXEIRA, P. H.; **A Hybrid Algorithm to Compute the Optimal Parameters of a System Viscoelastic Vibration Neutralisers in a Frequency Band**. International Conference on Motion and Vibration Control, Vol. 2, pp. 587-592, 1998.

BIOT, M. A.; **Variational Principles in Irreversible Thermodynamics with Application to Viscoelasticity**. Physical Review, Vol. 97, Nº 6, pp. 1463-1469, 1955.

CHRISTENSEN, R. M.; **Theory of Viscoelasticity: An Introduction**. 2ª Edição. Academic Press. New York, 1982

CRUZ, G. A. M.; **Projeto Ótimo de Neutralizadores Viscoelásticos Baseado no Modelo a Derivadas Fracionárias**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

DRAPER, N. R.; SMITH, Harry.; **Applied Regression Analysis**. 3ª edição John Wiley & Sons. 1998.

ESPÍNDOLA, J.J.; **Projeto de Isoladores Aeronáuticos**. Relatório final à Fundação Banco do Brasil. Universidade Federal de Santa Catarina. 1990.

ESPÍNDOLA, J.J.; LOPES; E.M.O.; SILVA NETO; J.M. **A Generalised Fractional Derivative Approach to Viscoelastic Material Properties Measurement**. Applied Mathematics and Computation. Estados Unidos. Vol. 164. nº 2. pp. 493-506. 2005.

FERRY, J.D.; **Viscoelastic Properties of Polymers**. John Wiley & Sons, 1980.

FRISWELL, M. I.; INMAN, D. J.; LAM, M. J.; **On the Realisation of GHM Models in Viscoelasticity**. Journal of Intelligent Material Systems and Structure 8(11). pp. 986 – 993. 1997.

GIBSON, W.C.; MCTAVISH, D.J.; **Implementation of the GHM Method for Viscoelastic Material using Matlab and Nastran**. Proceedings of SPIE. Vol. 2445. nº312. 1995.

GOLLA, D.F.; HUGHES, P.C.; **Dynamic of Viscoelastic Structures – A Time Domain, Finit Element Formulation**. Journal of Applied Mechanics. Vol. 52 pp. 897 – 905. 1985.

GOLDBERG, D. E.; **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**. Editora Addison-Wesley. 1989.

HIBBELER, R. C.; **Mechanics of Materials**. Pearson Prentice Hall, 7th Edition. 2008

ISO 10112.; **Damping Materials – Graphical Presentation of the Complex Modulus**. ISO, 1991.

JONES, D. I. G.; **Results of Recent Analysis of the Frequency-Temperature Behavior of Polyisobutylene**. Proceedings of Damping' 93. Vol. 1. pp. 334-353. 1993.

JONES, D. I. G.; **Handbook of Viscoelastic Vibration Damping**. John Wiley & Sons, 2001.

LAKES, R .S.; **Viscoelastic Solids**. CRC Press. 1999.

LOPES, E.M.O.; **On the Experimental Response Reanalysis of Structures with Elastomeric Materials**. Tese de Doutorado. University of Wales Cardiff. 1998.

LOPES, E.M.O.; BAVASTRI, C.A.; ESPÍNDOLA, J.J.; NETO, J.M.S. **Caracterização Dinâmica Integrada de Elastômeros por Derivadas Generalizadas**. III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM), 2004, Belém. Anais do III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica. 2004.

MCTAVISH, D.J.; **The Mini-Oscillator Technique: A Finite Element Method for the Modeling of Linear Viscoelastic Structure**., Institute for Aerospace Studies. University of Toronto. 1988.

MCTAVISH, D.J.; HUGHES, P.C.; **Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures**. Journal of Vibration and Acoustics. Vol. 115. pp. 103 – 110. 1993.

MOSCHEN, I.C.; **Sobre as Funções MITTAG-LEFFLER e o Modelo Fracionário de Materiais Viscoelásticos**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina. 2006.

NASHIF, A. D.; JONES, D.I.G.; HENDERSON, J.P.; **Vibration Damping**. John Willey & Sons, 1985.

PAPOULIS, A.; **The Fourier Integral and its Applications**. McGraw-Hill. 1962.

PAPOULIS, A.; **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**. McGraw-Hill. 1984.

PRITZ, T.; **Frequency Dependences of Complex Moduli and Complex Poisson's Ratio of Real Solid Materials**. Journal of Sound and Vibration. Vol. 214. pp. 83-104. 1998.

PRITZ, T.; **Five-parameter Fractional Derivative Model for Polymeric Damping Materials**. Journal of Sound and Vibration. Vol 265. pp. 935-952. 2003

SNOWDON, J.C.; **Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems**. John Wiley & Sons. 1968.

TRINDADE, M.A.; ALMEIDA, S.C.N.; **Análise Custo-Benefício de Modelos de Amortecimento para Estruturas com Elementos Viscoelásticos.** XXVII CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2006.

VASCONCELOS, R. P.; BATTISTA, R. C.; **Análise Numérica de um Amortecedor Viscoelástico através de Modelagem via Método GHM.** XXV CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods. 2004.

APÊNDICE I

MODELAGEM DE UM SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE (GDL) VIA GHM

I.1. Descrição via GHM padrão

Para um sistema massa-mola de 1 gdl, com uma força aplicada na massa e uma mola viscoelástica, a equação de movimento no domínio de Laplace pode ser escrita como

$$\{s^2 M + [G_0 + \bar{h}(s)]K\}q(s) = f(s) + M(sq_0 + \dot{q}_0), \quad (I.1.1)$$

sendo q a coordenada de deslocamento, f a força aplicada, M a massa do sistema e K a rigidez normalizada com relação ao módulo complexo de cisalhamento. As constantes q_0 e \dot{q}_0 são as condições iniciais.

Visando o uso da abordagem GHM, Friswell et al. (1997) propõem, de imediato, a introdução de um segundo gdl, z , para produzir um sistema de equações de movimento de segunda ordem, de onde a equação (I.1.1) e a equação

$$G_0 + \bar{h}(s) = G_0 + \frac{\hat{\alpha}s^2 + \hat{\gamma}s}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}}, \quad (I.1.2)$$

possam ser recuperadas com a eliminação desse gdl auxiliar.

O sistema proposto fica, então, sob a forma

$$\begin{bmatrix} M & m \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \hat{\beta} \begin{bmatrix} D & d \\ d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \hat{\delta} \begin{bmatrix} K & k \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (I.1.3)$$

onde os parâmetros M , D , K , m , d e k devem estar disponíveis para garantir que a equação (I.1.3) contenha as equações (I.1.1) e (I.1.2).

A transformada de Laplace da equação (I.1.3) leva a

$$\begin{bmatrix} Ms^2 + \hat{\beta}Ds + \hat{\delta}K & ms^2 + \hat{\beta}ds + \hat{\delta}k \\ ms^2 + \hat{\beta}ds + \hat{\delta}k & s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(s) \\ z(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(s) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & m \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sq_0 + \dot{q}_0 \\ sz_0 + \dot{z}_0 \end{bmatrix} + \hat{\beta} \begin{bmatrix} D & d \\ d & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (I.1.4)$$

sendo que z_0 e \dot{z}_0 são as condições iniciais do gdl extra, cujos valores, sustentam Friswell et al. (1997), podem ser escolhidos de forma arbitrária.

A equação matricial (I.1.4) pode ser expandida, formando o sistema

$$\begin{aligned} Ms^2 + \hat{\beta}Ds + \hat{\delta}K \quad q(s) + ms^2 + \hat{\beta}ds + \hat{\delta}k \quad z(s) &= f(s) + M(sq_0 + \dot{q}_0) + m(sz_0 + \dot{z}_0) + \hat{\beta}Dq_0 + \hat{\beta}dz_0 \\ ms^2 + \hat{\beta}ds + \hat{\delta}k \quad q(s) + s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta} \quad z(s) &= m(sq_0 + \dot{q}_0) + (sz_0 + \dot{z}_0) + \hat{\beta}dq_0 + \hat{\beta}z_0 \end{aligned} \quad (I.1.5)$$

A segunda equação de (I.1.5) fornece uma expressão para a coordenada adicional z , denominada coordenada dissipativa, no domínio de Laplace, tal que

$$z(s) = -\frac{ms^2 + \hat{\beta}ds + \hat{\delta}k}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}} q(s) + \frac{(mq_0 + z_0)s + (m\dot{q}_0 + \hat{\beta}dq_0 + \dot{z}_0 + \hat{\beta}z_0)}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}}. \quad (I.1.6)$$

Observa-se que, face à forma da equação (I.1.3), o denominador da equação (I.1.6) corresponde àquele da equação (I.1.2).

Friswell et al. (1997) afirmam que o segundo termo à direita na equação (I.1.6) é problemático. Por conta disso, o que se faz é arbitrar condições iniciais para z , de forma tal que esse segundo termo se anule. Isso é realizado fazendo-se

$$z_0 = -mq_0 \quad (I.1.7)$$

e

$$\dot{z}_0 = -m\dot{q}_0 + \hat{\beta}(m - d)q_0. \quad (I.1.8)$$

Com essas condições iniciais, a substituição de (I.1.6) na primeira equação de (I.1.5) fornece

$$\left[Ms^2 + \hat{\beta}Ds + \hat{\delta}K - \frac{(ms^2 + \hat{\beta}ds + \hat{\delta}k)^2}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}} \right] q(s) = f(s) + (Mq_0 + mz_0)s + (M\dot{q}_0 + \hat{\beta}Dq_0 + m\dot{z}_0 + \hat{\beta}dz_0) \quad (I.1.9)$$

A equação (I.1.9) pode ainda ser alterada com base nas mesmas condições iniciais relacionadas acima, resultando em

$$\left[\frac{(Ms^2 + \hat{\beta}Ds + \hat{\delta}K)(s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}) - (ms^2 + \hat{\beta}ds + \hat{\delta}k)^2}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}} \right] q(s) = f(s) + (M - m^2)(q_0s + \dot{q}_0) + \hat{\beta}(D + m^2 - 2md)q_0 \quad (I.1.10)$$

A equação (I.1.10) deve ser exatamente igual à equação (I.1.1). Reescrevendo, então, o lado esquerdo da equação (I.1.1), com o uso da equação (I.1.2), tem-se

$$\left[Ms^2 + G_0 + h(s)K \right] q(s) = \frac{(Ms^2 + G_0K)(s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}) + (\hat{\alpha}s^2 + \hat{\gamma}s)K}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}} q(s), \quad (I.1.11)$$

Que deve ser tal que

$$\frac{(Ms^2 + \hat{\beta}Ds + \hat{\delta}K)(s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}) - (ms^2 + \hat{\beta}ds + \hat{\delta}k)^2}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}} = \frac{(Ms^2 + G_0K)(s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}) + (\hat{\alpha}s^2 + \hat{\gamma}s)K}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}} \quad (I.1.12)$$

A equação (I.1.12) fornece as seguintes relações entre os parâmetros:

$$\begin{aligned} M - m^2 &= M \\ M + D - 2md &= M \\ M\hat{\delta} + D\hat{\beta}^2 + K\hat{\delta} - d^2\hat{\beta}^2 - 2mk\hat{\delta} &= M\hat{\delta} + G_0K + \hat{\alpha}K \\ \hat{\beta}\hat{\delta}(D + K - 2dk) &= \hat{\gamma}K + G_0\hat{\beta}K \\ \hat{\delta}(K - k^2) &= G_0K \end{aligned} \quad (I.1.13)$$

Observa-se que as duas primeiras equações de (I.1.13) fazem com que os termos que envolvem as condições iniciais, localizados na parte direita da equação (I.1.10), se igualem

aos termos que envolvem as mesmas condições iniciais na equação (I.1.1) , relativo ao movimento de um sistema de 1gdl, isso sem qualquer restrição adicional. Dessa forma não há necessidade da restrição $\hat{\gamma} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$ imposta por Golla e Hughes (1985).

As cinco equações do sistema (I.1.13) apresentam seis parâmetros desconhecidos, a saber M, D, K, m, d e k. Pode-se eliminar M, D e K, usando as duas primeiras e a última equações de (I.1.13) na terceira e na quarta equações do sistema. Esse procedimento fornecerá

$$\hat{\delta}(k-m)^2 - \hat{\beta}^2(d-m)^2 = \hat{\alpha}K \quad (\text{I.1.14})$$

e

$$2md - 2dk - m^2 + k^2 = \frac{\hat{\gamma}K}{\hat{\beta}\hat{\delta}}. \quad (\text{I.1.15})$$

A equação (I.1.15) pode ser rearranjada de tal forma que

$$2md - 2dk - m^2 + k^2 = (k-d)^2 - (d-m)^2 = \frac{\hat{\gamma}K}{\hat{\beta}\hat{\delta}}. \quad (\text{I.1.16})$$

Não há uma única solução para os três parâmetros desconhecidos m, d e k. Assim, uma restrição extra deve ser imposta. Caso $d - m = 0$ (o que é assumido por Golla e Hughes, 1985), as equações (I.1.14) e (I.1.115) não formarão equações independentes e a condição $\hat{\gamma} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$ é necessária para assegurar que haja um número infinito de soluções, em vez de um sistema sem solução. Portanto, considera-se que $d \neq m$.

A partir das equações (I.1.14) e (I.1.16), fazendo $(k-d) = (k-m) - (d-m)$, chega-se a uma equação quadrática em termos de $(k-m)^2$, eliminando-se, portanto, $(d-m)$. Essa equação quadrática é

$$(4\hat{\delta} - \hat{\beta}^2)(k-m)^4 + \frac{2K(\hat{\beta}\hat{\gamma} - 2\hat{\alpha}\hat{\delta})}{\hat{\delta}}(k-m)^2 - \frac{\hat{\gamma}K^2}{\hat{\delta}^2} = 0. \quad (\text{I.1.17})$$

Condições sobre os parâmetros materiais $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\delta}$ e $\hat{\gamma}$ podem ser extraídas da equação (I.1.17) para garantir que uma solução real para $(k-m)$ exista. Nota-se que apenas uma das soluções dessa equação quadrática em $(k-m)^2$ é uma solução das equações (I.1.14)

e (I.1.15). A outra solução está associada a condição necessária para eliminar $(d - m)$. Uma vez que $(k - m)$ foi estimado, $(d - m)$ pode ser calculado a partir da equação (I.1.14). A restrição extra (por exemplo, a escolha de um valor para m) pode então ser introduzida e m , d e k calculados. Já M , D e K são então calculadas a partir das equações de (I.1.13).

Uma restrição particularmente conveniente a ser introduzida é considerar $m = 0$, que faz com que a estrutura e o grau de liberdade extra fiquem acoplados apenas através das propriedades de amortecimento e rigidez, sem relação de propriedades inerciais.

I.2. Descrição via GHM

De uma forma mais geral, Friswell et al., 1997, propõem que a equação (I.2.1) pode ser reescrita de forma alternativa, como

$$G_0 + \bar{h}(s) = G_\infty + \frac{\hat{\theta}s + \hat{\mu}}{s^2 + \hat{\beta}s + \hat{\delta}}, \quad (\text{I.2.1})$$

onde G_∞ é o módulo real dinâmico superior e $\hat{\theta}$ e $\hat{\mu}$ são parâmetros que podem ser obtidos de $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\delta}$, sendo que $G_\infty = G_0 + \hat{\alpha}$, $\hat{\theta} = \hat{\gamma} - \hat{\alpha}\hat{\beta}$ e $\hat{\mu} = -\hat{\alpha}\hat{\delta}$. Procedendo como anteriormente, encontram-se equações equivalentes a (I.1.15) e (I.1.17) para os novos parâmetros $\hat{\theta}$ e $\hat{\mu}$.

APÊNDICE II

PROPRIEDADES DINÂMICAS DA BORRACHA BUTÍLICA

As figuras II.1 e II.2 mostram o comportamento dinâmico de uma borracha butílica de composição típica, conforme Jones (2001). Como pode ser observado, este material apresenta um único pico de fator de perda e, conseqüentemente, uma única região de transição no módulo real de cisalhamento, além de um *wicket plot* convexo, sem a presença de ondulações.

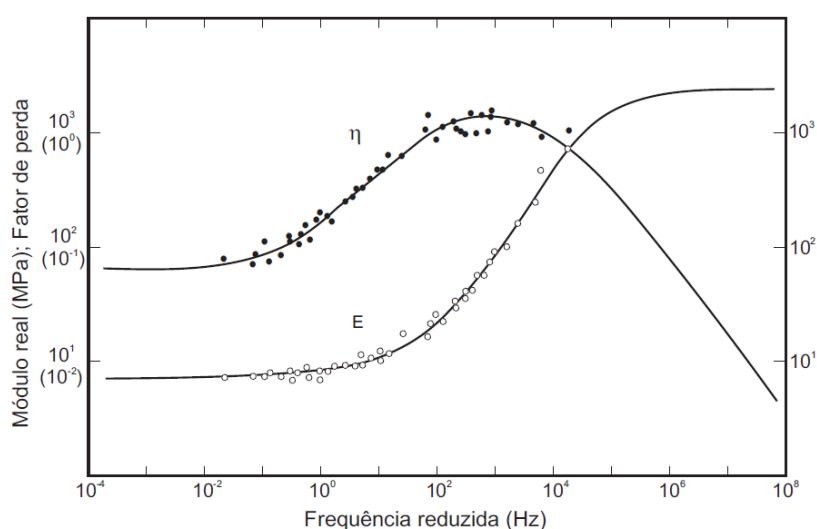


Figura II.1 – Gráfico de módulo e fator de perda versus frequência reduzida para uma borracha butílica de composição típica. (Fonte: JONES, 2001).

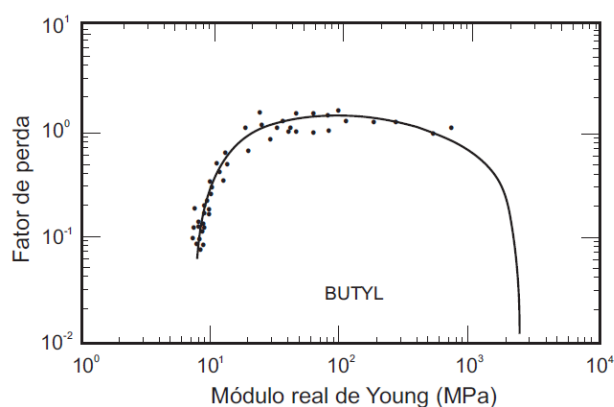


Figura II.2 – Wicket plot de uma borracha butílica de composição típica. (Fonte: JONES, 2001).

Essas informações são relevantes para as análises realizadas no capítulo 6.